R5

ÉLÉMENS
DE
GÉOMÉTRIE.

L.E EDOUARD JUNOD
Ste CROIX (SUISSE)

426 2022
01/2002
FM

514.11(033)

ÉLÉMENS
DE
GÉOMÉTRIE,

Par M. CLAIRAUT, des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Prusse, de Russie, de Bologne & d'Upsal.

A PARIS,

Chez NYON l'ainé, Libraire, rue du Jardinet, près de l'Imprimeur du Parlement.

M. DCC. LXXV. [1775]

Avec Approbation & Privilége du Roi.

L^t EDOUARD JUNOD
S^te CROIX (SUISSE)

Axa 19 0

514(091)

BIBLIOTHÈQUE EPF LAUSANNE

A MONSEIGNEUR
LE COMTE
DE MAUREPAS,
MINISTRE
ET SECRÉTAIRE D'ÉTAT,
COMMANDEUR DES ORDRES
DU ROI.

MONSEIGNEUR,

*C'*EST *peut-être oublier la ſu-périorité de vos connoiſſances, que de vous préſenter des Elémens de Géométrie ; mais c'eſt*

connoître vos vûes que de vous offrir quelque chose d'utile.

Je ne dois donc point appréhender de mettre sous votre protection un Ouvrage qui contient les principes d'une Science dont vous partagez nécessairement les succès. Je vous supplie très-humblement, MONSEIGNEUR, *de l'accepter, comme un hommage de ma reconnoissance, & comme une preuve du profond respect avec lequel je suis,*

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur, CLAIRAUT.

TABLE DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terreins.

II. *La ligne droite est la plus courte d'un point à un autre, & par consequent, la mesure de la distance entre deux points.* page 2

III. *Une ligne qui tombe sur une autre sans pencher sur elle d'aucun côte, est perpendiculaire à cette ligne.* 3

IV. *Le rectangle est une figure de quatre côtes perpendiculaires les uns aux autres.* 4

Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtes sont égaux. 4

V. *Maniere d'élever une perpendiculaire.* ibid.

VI. *Le cercle est la trace entiere que décrit la pointe mobile d'un compas, pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe.* 7

Le centre est le lieu de la pointe fixe. ibid.

Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert. ibid.

Le diametre est le double du rayon. ibid.

VII. *Maniere d'abaisser une perpendiculaire.* ibid.

VIII. *Couper une ligne en deux parties égales.* 8

IX. *Faire un quarré, ayant son côté.* 9

X. *Faire un rectangle, dont la longueur & la largeur sont données.* ibid.

XI. *Les paralleles sont des lignes toujours également distantes les unes des autres.* 10

Mener une parallele à une ligne par un point donné. 10

XII. *La mesure d'un rectangle est le produit de sa hauteur par sa base.* 13

XIII. *Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites.* 14

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites. ibid.

XIV. *La diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux.* 15

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre. 16

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base & même hauteur. ibid.

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base. ibid.

XV. *Les triangles qui ont même hauteur & même base, ont des superficies égales.* 17

XVII. *Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égaux en superficie.* 19

XVIII. *Les parallélogrammes sont des figures de quatre côtés, dont les deux opposés sont paralleles.* 20

On les mesure en multipliant leur hauteur par leur base. ibid.

XIX. *Les parallélogrammes qui ont une base commune, & qui sont entre les mêmes paralleles, sont égaux en superficie.* ibid.

XX. *Les polygones réguliers sont des figures que terminent des côtés égaux, & également inclinés les uns sur les autres.* 21

XXI. *Maniere de décrire un polygone d'un nombre déterminé de côtés.* 22

Le pentagone a cinq côtés, l'exagone six, l'eptagone sept, l'octogone huit, l'ennéagone neuf, le décagone dix, &c. ibid.

XXII. *Mesure de la surface d'un polygone régulier.* 23

L'apothéme est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés. ibid.

XXIII. *Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux.* 24

Maniere de le décrire. ibid.

XXVI. *Connoissant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal.* 27

XXVII. *Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre.* 29

XXVIII. *Maniere de faire un angle égal à un autre.* ibid.

Deux côtés & l'angle compris étant donnés, le triangle est déterminé. 30

XXIX. *Seconde maniere de faire un angle égal à un autre.* 31

La corde d'un arc de cercle est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc. ibid.

XXX. *Deux angles & un côté déterminent le triangle.* 32

XXXI. *Le triangle isoscele est celui qui a deux côtés égaux.* ibid.

Les angles que ces côtés sont avec la base, sont égaux entr'eux. 33

XXXIV. *En quoi consiste la ressemblance de deux figures.* 36

XXXVI. *Maniere de faire une figure semblable à une autre.* 37

XXXVIII. *Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troisiéme angle de l'un égalera le troisiéme angle de l'autre.* 40

XXXIX. *Deux triangles dont les angles sont respectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.* 41

XL. *Diviser une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.* 44

XLI. *Ce que c'est qu'une ligne quatriéme proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.* 45

XLII. *Les hauteurs des triangles ſemblables ſont proportionnelles à leurs côtés.* 46

XLIV. *Les aires des triangles ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.* 47

XLV. *Propriétés des figures ſemblables tirées de celles des triangles.* 49

XLVII. *Les aires des figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.* 52

XLVIII. *Les figures ſemblables ne ſont différenciées que par les échelles ſur leſquelles elles ſont conſtruites.* ibid.

L. *Maniere de meſurer la diſtance d'un lieu inacceſſible.* 54

LII. *Un angle a pour meſure l'arc de cercle qu'interceptent ſes côtés.* 56

LIII. *Le cercle eſt partagé en 360 degrés ; chaque degré en 60 minutes, &c.* 57

LIV. *L'angle droit a 90 degrés, & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.* 57
LV. *Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit.* 58
LVI. *Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit.* ibid.
LVII. *La somme des angles faits du même côté sur une ligne droite & qui ont le même sommet, vaut 180 degrés.* ibid.
LVIII. *Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, sont égaux, pris ensemble, à quatre droits.* 59
LIX. *Usage de l'instrument appellé demi-cercle, pour prendre la grandeur d'un angle.* ibid.
LX. *Usage du rapporteur, pour faire un angle d'un nombre déterminé de degrés.* 60
LXIII. *Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part &*

d'autre, une ligne droite qui tombe ſur deux paralleles. 64

Ces angles ſont égaux. ibid.

LXIV. *La ſomme des trois angles d'un triangle eſt égale à deux droits.* 65

LXVIII. *L'angle extérieur d'un triangle vaut les deux angles intérieurs oppoſés.* 67

LXIX. *Un angle d'un triangle iſoſcele donne les deux autres.* ibid.

LXX. *Les angles d'un triangle équilatéral ſont chacun de ſoixante degrés.* 68

LXXI. *Deſcription de l'exagone.* ibid.

LXXII. *La moitié de l'angle au centre de l'exagone, donne l'angle au centre du dodécagone.* 69

LXXIII. *Partager un angle en deux également.* 70

LXXIV. *Deſcription des polygones de 24, 48, &c. côtés.* ibid.

LXXV. *Deſcription de l'octogone.* 71

Et des polygones de 16, 32, &c. côtés. 72

SECONDE PARTIE.

De la méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

I. *Deux rectangles qui ont même hauteur, sont en même raison que leurs bases.* 76

V. *Maniere de changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée.* 77

VI. *Seconde maniere de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.* 78

VII. *On démontre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second à la hauteur du premier.* 80

VIII. *Si quatre lignes sont telles, que la premiere soit à la seconde, comme la troisiéme à la quatriéme, le rectangle formé*

formé par la premiere & par la quatriéme, sera égal à celui que forment la seconde & la troisiéme. 81

IX. *Quatre quantités, dont la premiere est à la seconde comme la troisiéme à la quatriéme, sont dites former une proportion.* ibid.

X. *Des quatre termes d'une proportion, le premier & le quatriéme sont nommés extrêmes; on nomme moyens le second & le troisiéme.* 82

XI. *Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* ibid.

XII. *Si le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre termes forment une proportion.* ibid.

XIII. *De-là on tire la regle de trois.* 83

Ou la maniere de trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés. 84

XVI. *Faire un quarré double d'un autre.* 86

XVII. *Faire un quarré égal à deux autres pris ensemble.* 87

XVIII. *L'hypothénuse d'un triangle rectangle est son grand côté.* 90

Et le quarré de ce côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres. ibid.

XIX. *D'où se tire une maniere simple de réduire deux quarrés en un seul.* ibid.

XX. *Si les côtés d'un triangle rectangle servent de bases à trois figures semblables, la figure faite sur l'hypothénuse égalera les deux autres prises ensemble.* 91

XXI. *Réduire plusieurs figures semblables à une seule.* 93

XXIII. *Le produit qui résulte de la multiplication d'un nombre par lui-*

même, eſt le quarré de ce nombre. 95

La racine d'un quarré eſt le nombre qui, multiplié par lui-même, donne le quarré. 96

XXIV. *Un nombre eſt multiple d'un autre, lorſqu'il le contient pluſieurs fois exactement.* ibid.

Le côté d'un quarré & ſa diagonale ſont incommenſurables. 97

XXV. *Autres lignes incommenſurables.* ibid.

XXVII. *Les triangles & les figures ſemblables, ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés ſont incommenſurables.* 101

XXVIII. *Et ces figures ſont toujours entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.* 102

TROISIÉME PARTIE.

De la meſure des figures circulaires, & de leurs propriétés.

I. *LA meſure du cercle eſt le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.* 108

II. *L'aire du cercle eſt égale à un triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe une droite égale à la circonférence.* ibid.

IV. *Le diametre d'un cercle ayant ſept parties, la circonférence en a près de 22.* 109

V. *Les circonférences des cercles ſont entr'elles comme leurs rayons.* 110

VI. *Les aires des cercles ſont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.* 111

VII. *Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle*

rectangle, celui que donne l'hypothénuse, vaut les deux autres pris ensemble. 112

VIII. *Une couronne est l'espace enfermé entre deux cercles concentriques.* 113

Pour mesurer une couronne, il faut multiplier sa largeur par la circonférence moyenne. 115

IX. *Le segment de cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde.* 116

La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment. ibid.

X. *Le secteur est une portion de cercle, terminée par deux rayons, & par l'arc qu'ils comprennent.* ibid.

Sa mesure & celle du segment. ibid.

XI. *Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.* 117

XIII. *Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle, on*

tire deux droites aux extrémités du diametre, on aura un angle droit. 120

XV. *Tous les angles dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc, ſont égaux; & ont pour commune meſure, la moitié de l'arc ſur lequel ils s'appuient.* 123

XVIII. *La tangente au cercle, eſt la ligne qui ne le touche qu'en un point.* 126

L'angle au ſegment eſt celui qui eſt fait par la corde & par la tangente. 127

Sa meſure eſt la moitié de l'arc du ſegment. ibid.

XIX. *La tangente eſt perpendiculaire au diametre qui paſſe par le point d'attouchement.* 128

XXI. *Ce que c'eſt qu'un ſegment capable d'un angle donné.* 129

Maniere de faire un ſegment capable d'un angle donné. ibid.

XXII. *Trouver la distance d'un lieu à trois autres dont les positions sont connues.* 131

XXIII. *Deux cordes se coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une est égal au rectangle des parties de l'autre.* 134

XXIV. *Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diametre d'un cercle, est égal au rectangle des deux parties du diametre.* 135

XXV. *Changer un rectangle en un quarré.* ibid.

XXVI. *Ce que c'est qu'une moyenne proportionnelle entre deux lignes droites.* 136

Maniere de la trouver. 137

XXVII. *Autre maniere.* ibid.

XXVIII. *Changer une figure rectiligne en un quarré.* 138

XXX. *Faire un quarré qui soit à un autre en raison donnée.* 139

XXXI. *Faire un polygone qui ſoit en raiſon donnée avec un polygone ſemblable.* 140

XXXII. *Faire un cercle qui ſoit à un autre cercle en raiſon donnée.* 141

XXXIII. *Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire deux lignes qui le traverſent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures, ſeront égaux.* ibid.

XXXIV. *Le quarré de la tangente eſt égal au rectangle de la ſécante par la partie extérieure.* 143

XXXV. *D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.* ibid.

QUATRIÉME PARTIE.

De la maniere de meſurer les ſolides & leurs ſurfaces.

I. *LE cube eſt une figure ſolide terminée par ſix quarrés. C'eſt la meſure commune des ſolides.* 147

II. *Le parallelipipede est un solide terminé par six rectangles.* 148

Les plans paralleles sont ceux qui conservent toujours entr'eux la même distance. ibid.

III. *Mesure du parallelipipede.* 149

IV. *Les parallelipipedes sont produits par un rectangle qui se meut parallelement à lui-même.* 151

V. *La ligne perpendiculaire à un plan est celle qui ne penche d'aucun côté sur ce plan.* ibid.

Il en est de même du plan perpendiculaire à un autre plan. ibid.

VI. *La ligne qui est perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.* 152

VIII. *Pratique simple pour élever ou pour abaisser des lignes perpendiculaires à des plans.* 154

IX. *Une ligne ſera perpendiculaire à un plan, ſi elle eſt perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.* 154

X. *Maniere d'élever un plan perpendiculaire à un autre.* 155

XI. *Mener un plan parallele à un autre.* ibid.

XII. *Meſurer l'inclinaiſon d'un plan ſur un autre.* 156

XIII. *Meſurer l'inclinaiſon d'une ligne ſur un plan.* 157

XIV. *Nouvelle maniere d'abaiſſer une ligne perpendiculaire à un plan donné.* 158

XV. *Seconde maniere d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné.* ibid.

XVI. *Le priſme droit eſt une figure ſolide, dont les deux baſes oppoſées ſont deux polygones égaux, & les autres faces des rectangles.* 159

XVII. *Formation des priſmes droits.* ibid.

XIX. *Deux prismes qui ont des bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs.* 160

XX. *Deux prismes qui ont la même hauteur, sont en même raison que leurs bases.* ibid.

XXI. *La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur.* 162

XXII. *Les prismes obliques different des prismes droits, en ce que les faces qui sont des rectangles dans ceux-ci, sont des parallelogrammes dans ceux-là.* ibid.

XXIII. *Formation des prismes obliques.* 163

XXIV. *Les prismes obliques sont égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur.* 164

XXV. *Il en est de même des parallelipipedes obliques, à l'égard des parallelipipedes droits.* 165

XXVI. *Les pyramides sont des corps renfermés par un certain nombre de*

triangles qui partent tous d'un même ſommet, & qui ſe terminent à une baſe polygone quelconque. 166

XXVII. *Elles retiennent le nom de leurs baſes.* 167

XXVIII. *On les diſtingue en pyramides droites & en obliques.* ibid.

XXXII. *En quoi conſiſte la ſimilitude de deux pyramides.* 171

XXXVII. *Les pyramides qui ont même baſe & même hauteur, ſont égales.* 175

XXXVIII. *Deux pyramides ſont encore égales, ſi, ayant la même hauteur, leurs baſes, ſans être des polygones ſemblables, ſont égales en ſuperficie.* ibid.

XXXIX. *Les pyramides qui ont même hauteur, ſont entr'elles comme leurs baſes.* 176

XLII. *La ſolidité d'une pyramide quelconque eſt le produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur.* 182

XLIII. *La pyramide eſt le tiers du priſ-*

me qui a même base & même hauteur. 183
XLV. *Le cylindre est un solide terminé par deux bases opposées & paralleles, qui sont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.* 184
On le distingue en cylindre droit, & en cylindre oblique. ibid.
XLVI. *Formation du cylindre.* 185
XLVII. *La surface courbe du cylindre droit est egale à un rectangle qui a la même hauteur, & dont la base est égale à sa circonférence.* 186
XLIX. *Les cylindres, qui ont même base & même hauteur, sont égaux en solidité.* 188
L. *La mesure d'un cylindre quelconque, est le produit de sa base par sa hauteur.* ibid.
LI. *Le cône est une espece de pyramide, dont la base est un cercle.* 189
LII. *On le distingue en cône droit, & en cône oblique.* ibid.

LIII. *La ſurface d'un cône droit ſe meſure en multipliant la moitié de ſon côté par la circonférence de ſa baſe.* 190
LIV. *Le développement d'un cône eſt un ſecteur de cercle.* ibid.
LVI. *Les cônes qui ont même baſe & même hauteur, ſont égaux.* 191
LVII. *Leur meſure eſt le produit de la baſe par le tiers de la hauteur.* ibid.
LIX. *Maniere de meſurer la ſurface d'un cône tronqué.* 193
LX. *La ſphere eſt le corps dont la ſurface a tous ſes points également éloignés du centre.* 194
LXV. *La ſurface de la ſphere a pour meſure le produit de ſon diametre, par la circonférence de ſon grand cercle.* 202
LXVI. *Ce que c'eſt qu'un ſegment de ſphere.* ibid.
Comment on meſure ſa ſurface. ibid.
LXVII. *La ſurface de la ſphere eſt égale à celle du cylindre circonſcrit.* 203

LXVIII. *Les tranches du cylindre & de la ſphere ont la même ſuperficie.* 204

LXIX. *La ſurface de la ſphere eſt égale à quatre fois celle de ſon grand cercle.* ibid.

LXX. *La ſolidité de la ſphere eſt le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.* 205

LXXI. *La ſolidité de la ſphere eſt les deux tiers de celle du cylindre circonſcrit.* ibid.

LXXII. *Meſure de la ſolidité d'un ſegment de ſphere.* 206

LXXIII. *En quoi conſiſte la ſimilitude de deux corps terminés par des plans.* 207

LXXIV. *Conditions qui déterminent la ſimilitude de deux cylindres droits.* 208

LXXV. *Celle de deux cylindres obliques.* ibid.

LXXVI. *Celle des cônes.* ibid.

LXXVII. *Celle de deux cônes tronqués.* 209

LXXVIII. *Les ſpheres, les cubes, & toutes les figures qui ne dépendent que d'une ſeule ligne, ſont toutes ſemblables.* 209
LXXIX. *En général, les ſolides ſemblables ne différent que par les échelles ſur leſquelles ils ſont conſtruits.* ibid.
LXXX. *Les ſurfaces des ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.* 210
LXXXI. *Les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons.* 212
LXXXIII. *Les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.* 214
LXXXIV. *Les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons.* 215

Fin de la Table.

PRÉFACE.

PRÉFACE.

QUOIQUE la Géométrie ſoit par elle-même abſtraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus ſouvent de la maniere dont elle eſt enſeignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, & de principes préliminaires, qui ſemblent ne promettre rien que de ſec au Lecteur. Les propoſitions qui viennent enſuite ne fixant point l'eſprit ſur des objets

plus intéressans, & étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les Commençans se fatiguent & se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on vouloit leur enseigner.

Il est vrai que pour sauver cette sécheresse, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en peut faire pour la pratique; mais par-là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à

des idées ſenſibles, qu'après avoir eſſuyé la fatigue de ſaiſir des idées abſtraites.

Quelques réflexions que j'ai faites ſur l'origine de la Géométrie, m'ont fait eſpérer d'éviter ces inconvéniens, en réuniſſant les deux avantages d'intéreſſer & d'éclairer les Commençans. J'ai penſé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par degrés; que c'étoit vraiſemblablement quelque beſoin qui avoit fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de la portée des Commençans, puiſque c'étoient des Commençans qui les avoient faits.

Prévenu de cette idée, je me ſuis propoſé de remonter à ce qui pouvoit avoir donné naiſſance à la Géométrie ; & j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode aſſez naturelle pour être ſuppoſée la même que celle des premiers Inventeurs, obſervant ſeulement d'éviter toutes les fauſſes tentatives qu'ils ont néceſſairement dû faire.

La meſure des Terreins m'a paru ce qu'il y avoit de plus propre à faire naître les premieres propoſitions de Géométrie ; & c'eſt, en effet, l'origine de cette Science, puiſque Géométrie ſignifie *meſure de Terrein*. Quelques Auteurs prétendent

que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Héritages détruites par les débordemens du Nil, jetterent les premiers fondemens de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue & de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporteroit pas à ces Auteurs, du moins ne sauroit-on douter que dès les premiers tems, les hommes n'ayent cherché des méthodes pour mesurer & pour partager leurs Terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulieres les conduisirent peu-à-peu à des recherches générales; & s'étant

enfin proposé de connoître le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formerent une Science d'un objet beaucoup plus vaste que celui qu'ils avoient d'abord embrassé, & à laquelle ils conserverent cependant le nom qu'ils lui avoient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commençans les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terreins, & des distances accessibles ou inaccessibles, &c. De-là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premieres, que la curio-

ſité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter ; & juſtifiant enſuite cette curioſité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéreſſant.

On ne ſauroit diſconvenir, ce me ſemble, que cette méthode ne ſoit au moins propre à encourager ceux qui pourroient être rebutés par la ſécheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ; mais j'eſpere qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'eſt qu'elle accoutumera l'eſprit à chercher & à découvrir ; car j'évite avec ſoin de donner aucune propoſition ſous la forme

de théorêmes; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorêmes, ça été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avoient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problêmes; c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de

découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui eſt entre des grandeurs données & des grandeurs inconnues, qu'on ſe propoſe de trouver. En ſuivant cette voie, les Commençans apperçoivent à chaque pas qu'on leur fait faire, la raiſon qui détermine l'Inventeur; & par-là ils peuvent acquérir plus facilement l'eſprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Elémens, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, & de ne m'attacher pas aſſez à l'exactitude rigoureuſe des démonſtrations. Je prie ceux qui pourroient me faire un pareil repro-

che, d'obſerver que je ne paſſe légérement que ſur des propoſitions dont la vérité ſe découvre, pour peu qu'on y faſſe attention. J'en uſe de la ſorte, ſur-tout dans les commencemens, où il ſe rencontre plus ſouvent des propoſitions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avoient de la diſpoſition à la Géométrie, ſe plaiſoient à exercer un peu leur eſprit; & qu'au contraire, ils ſe rebutoient, lorſqu'on les accabloit de démonſtrations, pour ainſi dire, inutiles.

Qu'Euclide ſe donne la peine de démontrer que deux cercles qui ſe coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé

dans un autre, a la ſomme de ſes côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il eſt renfermé ; on n'en ſera pas ſurpris. Ce Géométre avoit à convaincre des Sophiſtes obſtinés, qui ſe faiſoient gloire de ſe refuſer aux vérités les plus évidentes : il falloit donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le ſecours des raiſonnemens en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais les choſes ont changé de face. Tout raiſonnement qui tombe ſur ce que le bon ſens ſeul décide d'avance, eſt aujourd'hui en pure perte, & n'eſt propre qu'à obſcurcir la vérité, & à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourroit me faire, ce ſeroit d'avoir omis différentes propoſitions, qui trouvent leur place dans les Elémens ordinaires, & de me contenter, lorſque je traite des propoſitions, d'en donner ſeulement les principes fondamentaux.

A cela je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut ſervir à remplir mon projet; que les propoſitions que je néglige, ſont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, & qui d'ailleurs ne ſauroient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être inſtruit : qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis, doit

ſuffire pour faire entendre les propoſitions élémentaires qui les ſuppoſent. C'eſt une matiere que je traiterai plus à fond dans les Elémens d'Algébre, que je donnerai dans la ſuite.

Enfin, comme j'ai choiſi la meſure des Terreins pour intéreſſer les Commençans, ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Elémens avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette penſée ne peut venir qu'à ceux qui ne conſidéreront pas que la meſure des Terreins n'eſt point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me ſert ſeulement d'occaſion pour faire découvrir les principales vérités géométriques. J'aurois pû de même, re-

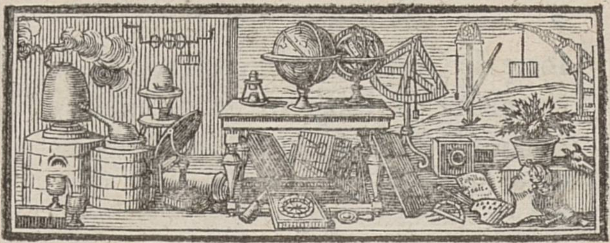
monter à ces vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurois voulu choisir; mais alors la multitude des idées étrangeres, dont il auroit fallu s'occuper, auroit comme étouffé les idées géométriques, auxquelles seules je devois fixer l'esprit du Lecteur.

Extrait des Registres de l'Académie Royale des Sciences, du 31 Août 1740.

MEssieurs DE REAUMUR, DE MAIRAN & NICOLE, qui avoient été nommés pour examiner les *Elémens de Géometrie* de M. CLAIRAUT, en ayant fait leur rapport, la Compagnie a jugé que cet Ouvrage méritoit l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 14 Décembre 1740.

Signé, FONTENELLE, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

ÉLÉMENS



ÉLÉMENS
DE
GÉOMÉTRIE.

PREMIERE PARTIE.

Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la meſure des Terreins.

CE qu'il ſemble qu'on a dû meſurer d'abord, ce ſont les longueurs & les diſtances.

I.

POUR meſurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une

ſorte de Géométrie naturelle, c'eſt de comparer la longueur d'une meſure connue à celle de la longueur qu'on veut connoître.

II.

La ligne droite eſt la plus courte d'un point à un autre, & par conſéquent la meſure de la diſtance entre deux points.

A l'égard de la diſtance, on voit que pour meſurer celle qui eſt entre deux points, il faut tirer une ligne droite de l'un à l'autre, & que c'eſt ſur cette ligne qu'il faut porter la meſure connue, parce que toutes les autres faiſant néceſſairement un détour plus ou moins grand, ſont plus longues que la ligne droite qui n'en fait aucun.

III.

Planche Premiere, Fig. 1.

Outre la néceſſité de meſurer la diſtance d'un point à un autre, il arrive ſouvent qu'on eſt encore obligé de meſurer la diſtance d'un point à une ligne. Un homme, par exemple, placé en D ſur le bord d'une riviere, ſe propoſe de ſavoir combien il y a du lieu

où il eſt, à l'autre bord AB. Il eſt clair que, dans ce cas, pour meſurer la diſtance cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, &c. qu'on peut tirer du point D à la droite AB. Or il eſt aiſé de voir que cette ligne la plus courte dont on a beſoin, eſt la ligne DC qu'on ſuppoſe ne pencher ni vers A, ni vers B. C'eſt donc ſur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire, qu'il faut porter la meſure connue, pour avoir la diſtance DC, du point D, à la droite A B. Mais on voit auſſi que, pour poſer cette meſure ſur la ligne DC, il faut que cette ligne ſoit préalablement tirée. Il étoit donc néceſſaire qu'on eût une méthode pour tracer des perpendiculaires.

Une ligne qui tombe ſur une autre ſans pencher ſur elle d'aucun côté, eſt perpendiculaire à cette ligne.

I V.

On avoit encore beſoin d'en tracer dans une infinité d'autres occaſions. On ſait, par exemple, que la régula-

FIG. 2 & 3.

Le rectangle est une figure de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres.

rité des figures telles que ABCD, FGHI, appellées rectangles, & composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, &c.

Et le quarré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux.

La premiere ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément quarré. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

V.

DANS les différentes opérations qui demandent qu'on mene des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne d'un point pris au-dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

FIG. 4.

Maniere d'élever une perpendiculaire.

Que du point C, pris dans la ligne AB, on veuille élever la ligne CD perpendiculaire à AB, il faudra que cette ligne ne penche ni vers A, ni vers B.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A & de B, & que la droite CD ne penche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A & de B; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que sa distance au point A soit égale à sa distance au point B : car, alors tirant par C, & par ce point une ligne droite CD, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourroit le chercher en tâtonnant; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici.

Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez, ou sur le terrein, ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous fixerez au point A, ou l'extrémité de la corde,

ou la pointe du compas, & faiſant tourner l'autre pointe, ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM. Puis, ſans changer de meſure, vous opérerez de même par rapport au point B, & vous décrirez l'arc QDN, qui coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

Car puiſque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d'une meſure commune, ſa diſtance au point A égalera ſa diſtance au point B. Donc CD ne penchera, ni vers A, ni vers B. Donc cette ligne ſera perpendiculaire ſur A B.

FIG. 5. Si le point C ne ſe trouve pas à égale diſtance de A & de B, il faut prendre deux autres points *a* & *b*, également éloignés de C, & s'en ſervir, à la place de A & de B, pour décrire les arcs PDM, QDN.

V I.

FIG. 4. SI une des traces, telle que PDM,

étoit continuée en O, en E, en R, &c. jusqu'à ce qu'elle revînt au même point P d'où elle commence, la trace entiere s'appelleroit circonférence du cercle, ou simplement cercle.

Le cercle est la trace entiere que décrit la pointe mobile d'un compas pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appellée arc de cercle.

Le point fixe A, son centre, ou celui du cercle.

Le centre est le lieu de la pointe fixe.

Et l'intervalle AD, son rayon.

Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert.

Toute ligne, comme DAE, qui passe par le centre A, & qui se termine à la circonférence, est appellée diamétre; il est évident que cette ligne est double du rayon, ce qui fait que le rayon est quelquefois nommé demi-diamétre.

Le diamétre est le double du rayon.

VII.

FIG. 6.

Maniere d'abaisser une perpendiculaire.

La maniere d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB, fournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne; car, plaçant en E, ou l'extrémité d'un fil,

ou la pointe du compas, & d'un même intervalle E *b*, marquant deux points *a* & *b* ſur la ligne AB, on cherchera, comme dans l'article précédent, un autre point D, dont la diſtance au point *a* & au point *b*, ſoit la même, & par ce point & par E, on menera la droite DE, qui ayant chacune de ſes extrémités également éloignée de *a* & de *b*, & ne penchant pas plus vers l'un de ces points que vers l'autre, ſera perpendiculaire ſur AB.

VIII.

De l'opération précédente, ſuit la ſolution d'un nouveau problême.

Fig. 7. Couper une ligne en deux parties égales.

Qu'il s'agiſſe de partager une ligne droite AB en deux parties égales; des points A & B, pris comme centres, & d'une ouverture de compas quelconque, on décrira les arcs REI, GEF: enſuite, des mêmes centres, & de la même ou de telle autre ouverture qu'on voudra, on décrira auſſi

les arcs PDM, QDN. Alors la ligne ED qui joindra les points d'interſections E & D, coupera AB en deux parties égales au point C.

I X.

La maniere de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'étoit plus aiſé que de s'en ſervir pour faire ces figures qu'on appelle rectangles & quarrés, dont on a parlé dans l'Article IV. On voit que pour faire un quarré ABCD, dont les côtés ſoient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre ſur la droite GE, un intervalle AB, égal à K; puis élever (Article V.) aux points A & B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, enſuite tirer DC.

Fig. 2. Faire un quarré, ayant ſon côté.

X.

Si on vouloit tracer un rectangle FGHI, dont la longueur fût K, & la largeur L, on feroit FG égale à K; enſuite on éleveroit les perpendiculai-

Fig. 3. Faire un rectangle, dont la lon-

gueur & la largeur sont données.

res FI & GH, chacune égale à L, puis on tireroit HI.

XI.

Les paralleles sont des lignes toujours également distantes les unes des autres.

DANS la construction des ouvrages, comme des remparts, des canaux, des rues, &c. on a besoin de mener des lignes paralleles, c'est-à-dire, des lignes dont la position soit telle que leurs intervalles ayent par-tout pour mesure des perpendiculaires de même longueur. Or pour mener ces paralleles, rien, ce semble, n'est plus naturel que de recourir à la méthode dont on se sert pour tracer des rectangles. Que AB, par exemple, soit un des côtés ou de quelque canal, ou de quelque rempart, &c. auquel on voudra donner la largeur CA; ou pour énoncer la question d'une maniere plus géométrique & plus générale, supposons qu'on veuille mener par C, la parallele CD à AB, on prendra à volonté un point B dans la ligne AB, & l'on opérera de

FIG. 8.

Mener une parallele à une ligne par un point donné

la même façon que ſi, ayant la baſe AB, on vouloit faire un rectangle ABDC, qui eût AC pour hauteur. Alors les lignes CD, AB, étant prolongées à l'infini, ſeroient toujours paralleles, ou, ce qui revient au même, elles ne ſe rencontreroient jamais.

XII.

La régularité des figures rectangulaires les faiſant ſouvent employer, comme nous avons déja dit, il ſe trouve bien des cas où l'on a beſoin de connoître leur étendue. Il s'agira, par exemple, de déterminer combien il faut de tapiſſerie pour une chambre, ou combien un enclos de maiſon ayant la forme d'un rectangle, doit contenir d'arpens, &c.

On ſent que, pour parvenir à ces ſortes de déterminations, le moyen le plus ſimple & le plus naturel, eſt de ſe ſervir d'une meſure commune, qui appliquée pluſieurs fois ſur la ſurface à

mesurer, la couvre toute entiere : méthode qui revient à celle dont on s'est déja servi pour déterminer la longueur des lignes.

Or il est évident que la mesure commune des surfaces, doit être elle-même une surface, par exemple, celle d'une toise quarrée, d'un pied quarré, &c. Ainsi mesurer un rectangle, c'est déterminer le nombre des toises quarrées, ou des pieds quarrés, &c. que contient sa surface.

Prenons un exemple, pour soulager l'esprit. Supposons que le rectangle FIG. 9. donné ABCD ait 7 pieds de haut sur une base de 8 pieds, on pourra regarder ce rectangle comme partagé en 7 bandes, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, qui contiendront chacune 8 pieds quarrés ; la valeur du rectangle sera donc 7 fois 8 pieds quarrés, ou 56 pieds quarrés.

Maintenant, si on se rappelle les premiers élémens du calcul arithmétique, & qu'on se souvienne que multiplier

deux nombres, c'eſt prendre l'un autant de fois que l'unité eſt contenue dans l'autre, on trouvera une parfaite analogie entre la multiplication ordinaire & l'opération par laquelle on meſure le rectangle. On verra qu'en multipliant le nombre des toiſes ou des pieds, &c. que donne ſa hauteur, par le nombre des toiſes ou des pieds, &c. que donne ſa baſe, on déterminera la quantité des toiſes quarrées, ou des pieds quarrés, &c. que contient ſa ſuperficie.

La meſure d'un rectangle eſt le produit de ſa hauteur par ſa baſe.

XIII.

Les figures qu'on a à meſurer, ne ſont pas toujours régulieres, comme les rectangles, cependant on a ſouvent beſoin d'avoir leur meſure. Tantôt il s'agira de déterminer l'étendue d'un ouvrage conſtruit ſur un terrein qui manquera de régularité, tantôt on voudra ſavoir ce qu'une terre irréguliérement bornée contiendra d'arpens : il étoit donc néceſſaire qu'à la méthode de

déterminer l'étendue des rectangles, on ajoutât celle de mesurer les figures qui ne sont pas rectangulaires.

Les figures rectilignes sont celles que terminent des lignes droites. FIG. 10.

On voit d'abord que, pour la pratique, la difficulté ne tombe que sur la mesure des figures rectilignes, telles que ABCDE, c'est-à-dire, des figures terminées par des lignes droites; car si dans le contour du terrein, il se trouve quelques lignes courbes, comme dans la figure ABCDEFG, il est évident que ces lignes partagées en autant de parties qu'il sera nécessaire pour éviter toute erreur sensible, pourront toujours être prises pour un assemblage de lignes droites.

FIG. 11.

Le triangle est une figure terminée par trois lignes droites.

Cela posé, on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la même façon, en les partageant en figures de trois côtés, nommées communément triangles; ce qu'on fera de la maniere la plus simple & la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour

de la figure ABCDE, on mene les lignes droites AC, AD, &c. aux points C, D, &c. FIG 10.

XIV.

Il ne s'agira donc plus que d'avoir la meſure des triangles qu'on aura formés. Or on ſait que pour trouver ce qu'on ignore, le moyen le plus ſûr eſt de chercher ſi dans ce qu'on connoît, rien ne ſe rapporteroit à ce qu'on veut connoître; mais on a déja vû que tout rectangle ABCD, eſt égal au produit de ſa baſe AB par ſa hauteur CB. D'ailleurs, il eſt aiſé de s'appercevoir que cette figure coupée tranſverſalement par la ligne AC, nommée diagonale, ſe trouve partagée en deux triangles égaux; & de-là on infere que chacun de ces triangles égalera la moitié du produit de leur baſe AB ou DC, par leur hauteur CB ou DA. FIG. 1.

La diagonale d'un rectangle eſt la ligne qui le partage en deux triangles égaux.

Il eſt vrai qu'il n'arrive guère que les triangles à meſurer, ayent deux de

Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre.

leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, comme les triangles ABC, ADC, qu'on appelle triangles rectangles; mais rien n'empêche qu'on ne les réduise tous à des triangles de cette espece.

PLAN. II. FIG. I.

Car que du point A, sommet d'un triangle quelconque ABC, on abaisse la perpendiculaire AD, sur la base BC, le triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ADB, ADC.

Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ADB, ADC seront les moitiés des rectangles AEBD, ADCF, le triangle proposé ABC, sera, de même, la moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base, & AD pour hauteur: mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur EB ou AD par la base BC, le triangle ABC aura pour mesure la moitié du produit de la base BC par la perpendiculaire AD, hauteur du triangle.

Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base & même hauteur.

Donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base.

On a donc la maniere de mesurer

tous

tous les terreins terminés par des lignes droites, puisqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puisse réduire à des triangles, & que des sommets de ces triangles, on fait abaisser des perpendiculaires sur leurs bases.

XV.

De ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour mesurer l'aire ou la superficie des triangles, on n'emploie que leur base & leur hauteur, sans égard à la longueur de leurs côtés, on tire cette proposition, ou ce théorême, que tous les triangles, tels que ECB, ACB, qui ont une base commune CB, & dont les hauteurs EF, AD, sont égales, ont la même superficie.

Fig. 2. Les triangles qui ont même hauteur & même base, ont des superficies égales.

XVI.

Pour faciliter l'intelligence du principe qui donne la mesure des triangles, nous avons cru ne devoir

choiſir pour baſe qu'un côté ſur lequel pourroit tomber la perpendiculaire abaiſſée du ſommet oppoſé ; ce qu'on a toujours la liberté de faire, quand il ne s'agit que de la meſure des terreins. Mais parce que dans la comparaiſon des triangles qui ont même baſe, les perpendiculaires abaiſſées de leurs ſommets peuvent tomber hors du
FIG. 3. triangle, comme dans la figure 3, il ſemble qu'il ſoit néceſſaire de voir ſi les triangles, tels que BCG ſont dans le cas des autres ; c'eſt-à-dire, s'ils ſont toujours moitié des rectangles ECBF, qui ont la perpendiculaire GH pour hauteur.

Mais c'eſt de quoi il eſt aiſé de s'aſſurer, en remarquant que le triangle CGH, ſomme des deux triangles CGB, GBH, eſt la moitié du rectangle ECHG, ſomme des deux rectangles ECBF, FBHG ; & qu'ainſi les deux triangles CGB, GBH, pris enſemble, valent la moi-

tié du rectangle ECHG : or le triangle GBH, est la moitié du rectangle FBHG ; donc le triangle proposé CGB, est la moitié de l'autre rectangle ECBF, qui a BC pour base, & GH pour hauteur.

XVII.

LA proposition démontrée dans les trois articles précédens, peut encore s'énoncer généralement en ces termes : les triangles EBC, ABC, GBC, sont égaux, lorsqu'ils ont une base commune BC, & qu'ils sont entre les mêmes paralleles EAG, CBH ; c'est-à-dire, lorsque leurs sommets E, A, G, se trouvent dans une même ligne droite EAG, parallele à la droite CB. Car alors (Article XI.) leurs hauteurs, mesurées par les perpendiculaires EF, AD, GH, sont les mêmes.

FIG. 4.

Les triangles qui ont même base, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles sont égaux en superficie.

XVIII.

ENTRE les différentes figures rectilignes qu'on sait mesurer par la méthode précédente, il y en a qui approchent

de la régularité des rectangles ; ce sont des espaces tels que ABCD, terminés par quatre côtés, dont chacun est parallele au côté qui lui est opposé. Ces figures sont appellées parallélogrammes ; elles sont plus aisées à mesurer que les autres figures rectilignes, les rectangles exceptés. Car qu'on partage le parallélogramme ABCD, en deux triangles ABC, ACD, ces deux triangles seront visiblement égaux : or comme chacun de ces triangles vaudroit la moitié du produit de la hauteur AF, par la base BC, le parallélogramme aura pour mesure le produit entier de la base BC, par la hauteur AF.

FIG. 5.

Les parallélogrammes sont des figures de quatre côtés, dont les deux opposés sont paralleles.

On les mesure en multipliant leur hauteur par leur base.

XIX.

De-là il suit, que tous les parallélogrammes ABCD, EBCF, qui auront une base commune, & qui se trouveront entre les mêmes paralleles, seront égaux ; ce qu'il est aisé de voir, même indépendamment de ce qui précéde,

FIG. 6 ou 7.

Les parallélogrammes qui ont une base commune & qui sont entre les mê-

en remarquant que le parallélogramme ABCD deviendra le parallélogramme EBCF, si on lui ajoute le triangle DCF, & que, de la figure entiere ABCF, on retranche le triangle ABE; qu'ainsi les deux triangles DCF, ABE, étant supposés égaux, il sera évident que le parallélogramme ABCD n'aura point changé d'étendue en devenant EBCF. Or, pour s'assurer de l'égalité de ces deux triangles, il suffira d'observer que AB & CD étant paralleles, aussi-bien que BE & CF, le triangle DCF ne sera autre chose que le triangle ABE, qui aura glissé sur sa base, de maniere que le point A sera arrivé en D, & E en F.

mes paralleles, sont égaux en superficie.

XX.

Il y a encore d'autres figures rectilignes qu'il est aisé de mesurer, & qu'on nomme polygones réguliers; figures que terminent des côtés égaux, qui ont tous la même inclinaison les uns

Les polygones réguliers sont des figures que termi-

nent des côtés égaux, & également inclinés les uns sur les autres.

* FIG. 8, 9 & 10.

ſur les autres. Telles ſont les figures ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH *.

Comme on a coutume de donner la forme ſymétrique de ces figures aux baſſins, aux fontaines, aux places publiques, &c. je crois qu'avant que d'apprendre à les meſurer, il faut voir de quelle maniere on les trace.

XXI.

Maniere de décrire un polygone d'un nombre déterminé de côtés.

QU'ON décrive une circonférence de cercle ; qu'on la partage en autant de parties égales qu'on voudra donner de côtés au polygone ; qu'enſuite on mene les lignes AB, BD, DE, &c. par les points A, B, D, E, &c. qui partageront la circonférence, on aura le polygone cherché, qu'on nommera, ou pentagone, ou exagone, ou eptagone, ou octogone, ou ennéagone, ou décagone, &c. ſuivant qu'il aura, ou cinq, ou ſix, ou ſept, ou huit, ou neuf, ou dix, &c. côtés.

Le pentagone a 5 côtés, l'exagone 6, l'eptagone 7, l'octogone 8, l'ennéagone 9, le décagone 10, &c.

XXII.

Pour avoir la meſure d'un polygone régulier, on pourroit employer la méthode qu'on a déja donnée (Article XIII.) pour toutes les figures rectilignes; mais on s'apperçoit aiſément que le plus court eſt de partager le polygone en triangles égaux, qui ayent tous le centre C pour ſommet. Car prenant un de ces triangles, CBD par exemple, & tirant ſur la baſe BD la perpendiculaire CK, qui pour lors ſera nommée l'apothéme du polygone; comme l'aire du triangle vaudra le produit de la baſe BD, par la moitié de CK, ce produit pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entiere.

Meſure de la ſurface d'un polygone régulier.

Fig. 10.

L'apothéme eſt la perpendiculaire abaiſſée du centre de la figure ſur un de ſes côtés.

XXIII.

Qu'on ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formeroit un triangle nommé

Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux.

communément triangle équilatéral ; qu'on partageât cette circonférence en quatre parties égales, on formeroit un quarré ; mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle ; c'est ce qu'on a déja vû (Art. IX.) pour le quarré. A l'égard du triangle équilatéral, il est aisé de s'appercevoir que pour le décrire sur une base donnée A B, il faut que des points A & B, comme centres, & d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF & GCH, qu'ensuite des points A & B on mene les lignes A C, B C, au point C, section commune des deux arcs D C F, G C H, & sommet du triangle.

Maniere de le décrire.

FIG. 11.

X X I V.

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral & le quarré, les premiers de tous les polygones, je pourrois joindre celle de tra-

cer géométriquement un pentagone, comme plusieurs Auteurs l'ont fait dans les Elémens qu'ils nous ont donnés; mais parce que les Commençans, pour qui seuls nous travaillons ici, n'appercevroient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit, en cherchant la maniere de tracer cette figure, route que l'Algébre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone au Traité qui suivra celui-ci, & dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus grand nombre de côtés, & qui, sans le secours de l'Algébre, ne pourroient être décrits géométriquement.

Des polygones qui ont plus de cinq côtés, & que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48, &c. côtés, & ceux de 8, de 16, de 32, de 64, &c. côtés, qu'on peut aisément décrire par

les méthodes que fournit la Géométrie élémentaire, comme on le verra à la fin de cette premiere Partie.

XXV.

Je reviens à la mesure des terreins, & je vois que ceux qu'on veut mesurer, sont souvent tels qu'ils se refusent aux opérations que prescrivent les méthodes précédentes.

Fig. 12. Je suppose que ABCDE soit la figure d'un champ, d'un enclos, &c. dont on voudra avoir la mesure. Suivant ce qu'on a vû, il faudroit partager ABCDE en triangles tels que ABC, ACD, ADE; ensuite mesurer ces triangles, après avoir abaissé les perpendiculaires EF, CH, BG : mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élévation par exemple, un bois, un étang, &c. qui empêche qu'on ne mene les lignes dont on aura besoin, que faudra-t-il faire alors ? Quelle méthode faudra-t-il sui-

vre pour remédier à l'inconvénient du terrein ? Celle qui se présente d'abord à l'esprit, c'est de choisir quelque terrein plat, sur lequel on puisse aisément opérer, & de décrire sur ce terrein des triangles égaux, & semblables aux triangles ABC, ACD, &c. Voyons comment on s'y prendra, pour former les nouveaux triangles.

XXVI.

PLAN. III. FIG. 1.

Connoissant les trois côtés d'un triangle, faire un autre triangle qui lui soit égal.

COMMENÇONS par supposer que l'obstacle se trouve dans l'intérieur du triangle ABC, dont les côtés seront connus, & qu'on veuille tracer un triangle égal & semblable sur le terrein choisi; d'abord on décrira une ligne DE égale au côté AB, ensuite prenant une corde de la longueur BC, & fixant une de ses extrêmités en E, on décrira l'arc IFG, qui aura la corde pour rayon; & par le moyen d'une autre corde, prise égale à AC, & dont on attachera pareillement un des bouts

FIG. 1 & 2.

en D, on tracera l'arc KFH, qui coupera le premier au point F. Alors menant les lignes DF & FE, on aura un triangle DEF, égal & ſemblable au triangle propoſé ABC ; ce qui eſt évident : car les côtés DF & EF, qui s'uniront au point F, étant reſpectivement égaux aux côtés AC & BC, unis au point C, & la baſe DE ayant été priſe égale à AB, il ne ſeroit pas poſſible que la poſition des lignes DF & EF ſur DE, fût différente de la poſition des lignes AC & BC ſur AB. Il eſt vrai qu'on pourroit prendre les lignes D*f*, E*f*, au-deſſous de DE ; mais le triangle ſe trouveroit encore le même, il ſeroit ſimplement renverſé.

XXVII.

Fig. 3. Si on ne pouvoit meſurer que deux des trois côtés du triangle ABC, les deux côtés AB, BC, par exemple ; il eſt clair qu'avec cela ſeul, on ne pour-

roit pas déterminer un ſecond triangle égal & ſemblable à A B C. Car quoi-qu'on eût pris D E, égal à B C, & D F, égal à B A, on ne ſauroit quelle poſition donner à celle-ci, relativement à l'autre. Pour lever cette difficulté, la reſſource qui ſe préſente eſt ſimple : on fait pencher D F, de la même maniere ſur D E, que A B penche ſur B C; ou, pour s'exprimer comme les Géométres, on donne à l'angle F D E la même ouverture qu'à l'angle A B C.

FIG. 3 & 4.

Un angle eſt l'inclinaiſon d'une ligne ſur une autre.

XXVIII.

Maniere de faire un angle égal à un autre.

POUR faire cette opération, on prend un inſtrument tel que *abc*, compoſé de deux regles qui puiſſent tourner autour de *b*, & l'on poſe ces regles ſur les côtés A B, & B C. Par-là elles font entr'elles le même angle que les côtés AB & BC. Plaçant donc la regle *b c* ſur la baſe D E, de maniere que le centre *b* réponde au point D, & que

l'ouverture de l'inſtrument reſte toujours la même, la regle *a b* donnera la poſition de la ligne DF, qui fera, avec la ligne DE, l'angle FDE, égal à l'angle ABC. Or la ligne DF aura été priſe de même longueur que BA. Donc il ne s'agira plus que de mener par F & par E la droite FE, pour avoir le triangle FED entiérement égal & ſemblable au triangle ABC. Pratique ſimple, qui ſuppoſe ce principe évident, qu'un triangle eſt déterminé par la longueur de deux de ſes côtés, & par leur ouverture; ou, ce qui revient au même, qu'un triangle eſt égal à un autre, lorſque deux de leurs côtés ſont reſpectivement égaux, & que l'angle compris entre ces côtés eſt également ouvert.

Deux côtés & l'angle compris, étant donnés, le triangle eſt déterminé.

XXIX.

On pourroit encore faire l'angle FDE égal à l'angle ABC, de la maniere ſuivante.

FIG. 5 & 6.

Du centre B, & d'un intervalle quelconque B *a*, décrivez un arc *ahc*; ensuite du centre D, & du même intervalle, tracez l'arc *eif*: alors vous n'aurez plus qu'à chercher un point *f*, qui soit placé sur l'arc *eif*, de la même maniere que *a* se trouvera placé sur l'arc *cha*. Or vous trouverez facilement ce point *f*, en vous servant de la droite *ac*, qui, suivant la définition ordinaire, se nommera la corde de l'arc *ahc*.

Seconde maniere de faire un angle égal à un autre.

La corde d'un arc de cercle, est la droite que terminent les deux extrémités de l'arc.

Car si, du centre *e*, & d'un intervalle égal à *ac*, vous décrivez l'arc *lfk*, l'intersection des deux arcs *eif*, *lfk*, vous donnera le point cherché *f*.

Tirez ensuite par D & par *f*, la ligne D*f*F, vous aurez l'angle FDE égal à l'angle ABC. Ce qui est évident (Article XXVI.) puisque les triangles B*ac*, D*fe*, seront entiérement égaux, & semblables dans toutes leurs parties.

XXX.

Lorsqu'on veut faire le triangle

FIG. 3 & 4. FDE égal au triangle ABC, s'il arrive qu'on ne puiſſe meſurer qu'un des côtés, BC par exemple, on a recours aux angles ABC & ACB. Ayant fait DE égal à BC, on place les lignes FD & FE, de maniere qu'elles faſſent, avec DE, les mêmes angles que AB & AC font avec BC : alors, par la rencontre de ces lignes, on a le triangle FDE égal & ſemblable au triangle ABC. Le principe que ſuppoſe cette opération, eſt de lui-même ſi ſimple, qu'il n'a pas beſoin d'être démontré.

Deux angles & un côté déterminent le triangle.

XXXI.

FIG. 7.

Le triangle iſoſcele eſt celui qui a deux côtés égaux.

Si des trois côtés du triangle ABC, on ne pouvoit meſurer que la baſe BC, & qu'on ſût d'ailleurs que ce triangle fût iſoſcele, c'eſt-à-dire, que les deux côtés AB & AC, fuſſent égaux : il eſt évident qu'il ſuffiroit de meſurer un des deux angles ABC, ACB ; car alors l'autre lui ſeroit égal.

On en voit aiſément la raiſon, ſi on ſe

ſe repréſente ce qui arriveroit, en ſuppoſant que les deux côtés AB, AC du triangle ABC, fuſſent d'abord couchés ſur BD & ſur CE, prolongemens de la baſe BC, & qu'enſuite on les relevât pour réunir leurs extrémités au point A; car alors l'égalité de ces deux côtés les empêcheroit de faire plus de chemin l'un que l'autre. Donc étant joints, ils pencheroient également ſur la baſe BC. Donc l'angle ABC ſeroit égal à l'angle ACB.

Les angles que ces côtés font avec la baſe, ſont égaux entr'eux.

XXXII.

POUR revenir à la meſure des Terreins, on verra que quels que ſoient les obſtacles qu'on pourra rencontrer dans leur intérieur, il ſera aiſé, par la méthode précédente, de tranſporter ſur un terrein libre, tous les triangles qui partageront l'eſpace qu'on voudra meſurer.

Suppoſons, par exemple, que vous vouluſſiez meſurer un bois, dont la figure fût ABCDEFG.

FIG. 8.

D'abord vous prendriez un triangle égal à ABC, ce que vous pourriez faire ſans entrer dans l'intérieur de ce triangle, en meſurant les deux côtés AB, BC, & l'angle compris CBA.

Ce triangle décrit donneroit l'angle BCA, & la longueur de AC; & comme vous pourriez meſurer le côté extérieur DC, vous auriez dans le triangle CAD, les côtés DC & CA. Quant à l'angle DCA, vous le trouveriez en
FIG. 8 & 9. prenant d'abord l'angle IKL égal à l'angle DCB, enſuite l'angle LKO égal à l'angle BCA, ce qui vous donneroit l'angle reſtant IKO, égal à l'angle cherché DCA.

Le triangle ADC, ainſi déterminé par les deux côtés DC & CA, & par l'angle compris DCA, vous connoîtriez de même le triangle DAG, & le reſte de la figure.

XXXIII.

La méthode qu'on vient de donner

pour mesurer les terreins dans lesquels on ne sauroit tirer des lignes, fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni & libre, assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrein dont on cherche la mesure. Et même quand on en trouveroit, la grande longueur des côtés des triangles, pourroit rendre les opérations très-difficiles. Abaisser une perpendiculaire sur une ligne, d'un point qui en est éloigné seulement de 500 toises, ce seroit un ouvrage extrêmement pénible, & peut-être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bientôt dans l'esprit de représenter la figure à mesurer ABCDE, par une figure semblable *abcde*, mais plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *a b* soit de 100 pouces, si le côté AB est de

PLAN. IV.

FIG. 1 & 2.

100 toiſes; le côté *bc* de 45 pouces, ſi BC eſt de 45 toiſes : & de conclure enſuite que ſi l'étendue de la figure réduite *abcde* eſt de 60000 pouces quarrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60000 toiſes quarrées.

Mais, avant toutes choſes, il faut ſavoir en quoi conſiſte la reſſemblance de deux figures.

XXXIV.

En quoi conſiſte la reſſemblance de deux figures.

Or, pour peu qu'on y réfléchiſſe, on reconnoîtra bientôt que les deux figures ABCDE, *abcde*, pour être ſemblables, doivent être telles que les angles A, B, C, D, E, de la grande ſoient égaux aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la petite; & que de plus, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c. de la petite, contiennent autant de parties *p*, que les côtés AB, BC, CD, &c. de la grande, contiennent de parties P.

XXXV.

Pour exprimer cette ſeconde condition, les Géometres diſent qu'il faut que les côtés AB, BC, CD, &c. ſoient proportionnels aux côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c.; ou que le côté AB contienne *ab*, de la même maniere que BC contient *bc*, &c.; ou que le côté AB ſoit auſſi grand, par rapport à *ab*, que BC l'eſt par rapport à *bc*, &c.; ou encore, qu'il y ait même raiſon, ou même rapport entre AB & *ab*, qu'entre BC & *bc*, &c.; ou enfin, que AB ſoit à *ab*, comme BC à *bc*, &c. Toutes façons d'exprimer la même choſe, mais qu'il faut ſe rendre familieres, pour entendre le langage des Géometres.

XXXVI.

Maniere de faire une figure ſemblable à une autre.

Après avoir vu en quoi conſiſte la reſſemblance de deux figures, cherchons quelle eſt la voie qui ſe préſente le plus naturellement pour tracer une figure

ſemblable à une autre. Pour cela, repréſentons-nous un Deſſinateur, qui veut copier une figure en la réduiſant.

D'abord prenant *ab*, pour repréſenter la baſe AB de la figure à copier ABCDE, il incline ſur *ab* les côtés *ae* & *bc*, de la même façon que AE & BC ſont inclinés ſur AB, en obſervant que les longueurs de *ae* & de *bc* ſoient à celle de *ab*, comme les longueurs de AE & de BC ſont à celle de AB; c'eſt-à-dire, que ſi AE, par exemple, eſt la moitié de AB, il fait *ae* égal à la moitié de *ab*, & qu'il en uſe de même pour déterminer la longueur de *bc*, relativement à BC.

Ayant ainſi déterminé les points *e* & *c*, il trace deux lignes *ed* & *cd*, qu'il incline ſur *ea* & ſur *cb*, de la même maniere que ED & CD ſont inclinés ſur EA & ſur CB; & prolongeant ces lignes juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en *d*, il acheve ſa figure *abcde*.

XXXVII.

Qu'on réfléchisse présentement sur cette construction, on verra qu'elle n'est appuyée que sur l'égalité qui est entre les angles E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, & sur la proportionalité des côtés EA, AB, BC, & des côtés *ea*, *ab*, *bc*; qu'ainsi la figure se trouve finie, sans qu'on ait pris l'angle *d*, égal à l'angle D, ni les côtés *ed*, *cd*, proportionnels aux côtés ED, CD; réflexion, qui d'abord pourroit faire craindre que l'angle *d* ne fût pas effectivement égal à l'angle D, ni les côtés *ed*, *cd*, proportionnels aux côtés ED, CD, & que, par conséquent, la figure *abcde* ne se trouvât pas entiérement semblable à la figure ABCDE. Mais n'eût-on que l'expérience pour se rassurer, ce doute se dissiperoit bientôt; outre que pour peu d'attention qu'on y fasse, on sent que de l'égalité respective des quatre angles E, A, B, C, & *e*, *a*, *b*, *c*, &

de la proportionalité des trois côtés EA, AB, BC, & *ea*, *ab*, *bc*, résultent nécessairement l'égalité des angles D, *d*, & la proportionalité des côtés ED, CD, & *ed*, *cd*.

Cependant, pour écarter tout soupçon, faisons voir que toutes les conditions que demande la ressemblance de deux figures, sont nécessairement dépendantes les unes des autres ; ce qu'il nous sera aisé de faire, en examinant d'abord les triangles, qui sont les figures les plus simples, & qui entrent nécessairement dans la composition de toutes les autres ; examen qui nous conduira à toutes les propriétés & à tous les usages des figures semblables.

XXXVIII.

FIG. 3 & 4. Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, le troi-

SUPPOSONS que sur la base *ab* on trace le triangle *abc*, en ne prenant que les angles *cab*, *cba* égaux aux angles CAB, CBA du triangle ABC, on s'assurera premierement que le troisiéme an-

gle *acb* égalera le troiſiéme angle ACB. ſiéme angle de l'un égalera le troiſiéme angle de l'autre.

Car ſoit poſé le triangle *abc* ſur le triangle ABC, de maniere que le point *a* ſe trouve ſur le point A, *ab* ſur AB, *ac* ſur AC, il eſt clair que *cb* ſera parallele à CB, & cela parce que le côté *cb*, prolongé, ne pourroit rencontrer le côté CB, que les deux lignes ne penchaſſent inégalement ſur AB, & que, par conſéquent, les angles *cb*A & CBA fuſſent inégaux; ce qui ſeroit contre la ſuppoſition.

Comme, de l'égalité des angles *cba* & CBA, il ſuivra que les lignes *cb*, CB ſeront paralleles, du parallé-liſme de ces lignes, il ſuivra auſſi que les angles A*cb*, ACB ſeront égaux; ce qu'il s'agiſſoit de prouver.

XXXIX.

Deux triangles, dont les angles ſont reſpectivement égaux, ont leurs côtés proportionnels.

MAINTENANT faiſons voir que les côtés qui ſe répondent dans deux triangles *acb* & ACB, qui ont les mêmes angles, ſont proportionnels.

Pour fixer nos idées, ſuppoſons d'abord que *ab* ſoit la moitié de AB, il faudra que nous prouvions que *ac* ſera auſſi la moitié de AC, & *bc* la moitié de BC. Que *acb*, ainſi que dans l'article précédent, ait encore la poſition A*cb*, ſi on méne *cg* parallele à AB, il eſt clair que cette ligne égalera *b*B ou A*b*, & que *g*B égalera de même *cb*. Or comme les angles C*gc* & C*cg* ſeront manifeſtement égaux aux angles *cb*A & *c*A*b*, le triangle C*cg* égalera le triangle *c*A*b*. (Article XXX.) Donc on aura C*c* égal à A*c*, & C*g* égal à *cb*, ou à *g*B. Donc A*c* ou *ac* ſera moitié de AC, & *cb* moitié de CB.

FIG. 3 & 5. Si *ab* étoit contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudroit, dans AB, il ſeroit également aiſé de démontrer que *ac* ſeroit contenu le même nombre de fois dans AC, & *cb* dans CB. Car des points de diviſion *b*, *f* de la baſe AB, menant *bc*, *fh*, &c. paralleles à BC, on pourroit

placer le long de A C, trois, quatre, &c. triangles A *c b*, *c h g*, *h* C *i*, &c. égaux aux triangles *a c b*, A *c b*.

Mais que *a b*, au lieu d'être contenu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois & demie, par exemple, on prouveroit que *a c* feroit aussi contenu deux fois & demie dans AC, & *bc* deux fois & demie dans BC. FIG. 3 & 6.

Car, quand par le moyen des paralleles *b c*, *f h*, on auroit placé le long de A C, les deux triangles A *c b*, *chg*, égaux à *a c b*, il resteroit entre les deux paralleles *h f* & C B de quoi placer un triangle C *h i*, dont les côtés feroient moitié des côtés de *c* A *b*; ce qui est évident, puisque par la supposition, *f* B feroit la moitié de A*b*, & que la base *hi* du triangle C *hi* égaleroit *f* B, à cause des paralleles *hf*, CB. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, *abc*, ont les mêmes angles, ces triangles, nommés triangles semblables, ont leurs

côtés proportionnels, ou, ce qui revient abſolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles ABC, contiennent le même nombre de parties P, que les côtés *ab*, *bc*, *ac*, de l'autre triangle *abc*, contiennent de parties *p*. P étant le pied, la toiſe, &c. ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC a été conſtruit, & *p* celle dont on s'eſt ſervi en conſtruiſant *abc*.

X L.

De la propoſition que nous venons de démontrer, ſe tire naturellement la ſolution d'un problême ſouvent utile dans la pratique.

Diviſer une ligne en tant de parties égales qu'on voudra.

On demande qu'une ligne ſoit diviſée en un nombre donné de parties égales; ce qui ſe pourroit faire, à la vérité, en tâtonnant; mais jamais avec cette ſûreté que donne l'exactitude géométrique.

Suppoſons, par exemple, qu'on ait

Fig. 5.

à diviſer AB en trois parties égales, on

commence par tirer une ligne indéfinie AC, qui fasse un angle quelconque avec AB : ensuite on porte sur cette ligne trois parties égales A*c*, *ch*, *h*C, d'une ouverture de compas prise à volonté ; puis on tire CB, & l'on mene à cette droite les paralleles *cb*, *hf* ; par-là, AB coupée aux points *b* & *f*, se trouve partagée en trois parties égales ; ce qui est clair par l'article précédent.

XLI.

Ce que c'est qu'une ligne quatriéme proportionnelle à trois autres, & comment on la trouve.

Fig. 6.

Si on vouloit diviser une ligne en un nombre fractionnaire de parties, comme deux & demie, trois & un quart, &c. ou bien qu'on proposât en général, de diviser la ligne AB au point *b*, en sorte que AB fût à A*b*, comme la ligne NO à la ligne MQ ; on voit encore que la solution du problême dépendroit de l'art. XXXIX ; c'est-à-dire, qu'il faudroit tirer par A une droite quelconque, prendre sur cette droite, A*c* & AC respectivement

égales à MQ & à NO, & enſuite mener *cb* parallele à CB; alors le point *b* feroit le point cherché.

Les Géometres énoncent de cette autre maniere, le problême que nous venons de réſoudre. Trouver à trois lignes NO, MQ, AB, une quatriéme proportionnelle.

XLII.

Fig. 7 & 8. Les hauteurs des triangles ſemblables, ſont proportionnelles à leurs côtés.

Il eſt évident que deux triangles ſemblables ABC, *abc* auront, non-ſeulement leurs côtés proportionnels, mais que les perpendiculaires CF, *cf*, qu'on abaiſſera des ſommets C, *c* ſur les baſes AB, *ab*, ſuivront encore la proportion des côtés : ce qui eſt ſi aiſé à démontrer par ce qui précéde, que nous négligerons de nous y arrêter.

XLIII.

Quant à l'aire des triangles ſemblables ABC, *abc*, on voit que celle du premier contiendra autant de quar-

rés X faits ſur la meſure P, que l'aire du ſecond contiendra de quarrés *x*, faits ſur la meſure *p*. Car comme CF & AB auront, par l'article précédent, autant de parties P, que *cf* & *ab* auront de parties *p*; la moitié du produit de CF par AB, meſure de ABC (Article XIV.) donnera le même nombre que celui qui réſultera de la moitié du produit de *cf* par *ab*, meſure de *abc*; mais avec cette différence, que CF & AB ſe comptant en parties P, leur produit ſe comptera en quarrés X, & que *cf* & *ab* qui ſe compteront en parties *p*, donneront un produit qui ſe comptera en quarrés *x*.

XLIV.

Ce que nous venons de dire ſur la meſure des triangles ſemblables, ſert de preuve à une propoſition, qui dans les Elémens de Géométrie, s'énonce ordinairement ainſi. Les triangles ſemblables ABC, *abc*, ſont entr'eux

Les aires des triangles ſem-

blables ; ſont entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.

comme les quarrés ABDE, *abde*, de leurs côtés homologues ou correſpondans AB, *ab*.

La démonſtration que renferme l'article précédent, mene abſolument à cette conſéquence ; car le quarré ABDE, contenant autant de X que *abde* contient de *x*, il eſt évident que les deux nombres de quarrés X, qui expriment le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, ſont les mêmes que les nombres de quarrés *x*, qui donnent le rapport du triangle *abc* au quarré *abde* ; ou, ce qui revient au même, que le triangle ABC eſt au quarré ABDE, comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

De-là il ſuit que ſi, par exemple, le côté AB étoit double du côté *ab*, le triangle ABC ſeroit quadruple du triangle *acb* ; que ſi AB étoit triple de *ab*, le triangle ACB ſeroit neuf fois plus grand que le triangle *acb*, &c. ; car AB ne peut être double de *ab*, que le

le quarré ABDE ne ſoit quadruple du quarré *abde*, &c.

XLV.

Fig. 1 & 2. même Planche.

Propriétés des figures ſemblables, tirées de celles des triangles.

POUR paſſer préſentement des triangles aux autres figures, ſuppoſons qu'à chacun des triangles ſemblables ABD, *abd*, on joigne deux autres triangles ADE & BDC, *ade* & *bdc*, les deux premiers ſemblables aux deux autres, on verra que dans les figures totales ABCDE, *abcde*,

1°. Les angles A, B, C, D, E, ſeront les mêmes que les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; ce qui eſt clair, puiſque les uns & les autres ſeront, ou des angles correſpondans de triangles ſemblables, ou des angles compoſés de ces angles correſpondans.

2°. On verra que le rapport des côtés homologues ou correſpondans DE, *de*, BC, *bc*, &c. des figures ABCDE, *abcde*, ſera néceſſairement le même; c'eſt-à-dire, que ſi P, par exemple, ſe trouve un certain nombre de fois dans

la baſe AB, & que *p* ſe trouve le même nombre de fois dans *ab*, P & *p* ſeront auſſi contenus un même nombre de fois dans deux côtés homologues quelconques DE & *de*. Car à cauſe de la reſſemblance des triangles ABD, *abd*, la quantité de P que renfermera AD, égalera la quantité de *p* renfermée dans *ad*; alors regardant ces côtés comme les baſes des triangles ſemblables ADE, *ade*, le nombre de parties P contenues dans DE, ſera le même que le nombre de parties *p* que contiendra le côté *de*.

3°. On verra encore que ſi dans les deux figures on tiroit des lignes qui ſe répondiſſent, telles que CE, *ce*, ou les perpendiculaires DF, *df*, &c.; ces lignes ſeroient toujours entr'elles dans la même raiſon que les côtés homologues des deux figures.

Donc les figures ABCDE, *abcde*, ſeront entierement ſemblables dans toutes leurs parties.

XLVI.

La figure *abcde* ainſi décrite parfaitement ſemblable à la figure ABCDE, il eſt évident que ſi on vouloit tracer de nouveau une figure entierement égale à *abcde*, & par conſéquent, encore ſemblable à ABCDE, il ſeroit inutile de meſurer tous les côtés & tous les angles de *abcde*; qu'il ſuffiroit, par exemple, de prendre les trois côtés *ab*, *ea*, *bc*, & les quatre angles *e*, *a*, *b*, *c*, & qu'avec cela ſeul on ſeroit ſûr de retracer la même figure *abcde*, ſemblable à ABCDE; ce qui forme une démonſtration complette de ce qu'on n'avoit fait que préſumer (Article XXXVII). Mais on peut aller plus loin; car il eſt clair qu'on aura toujours différentes façons de combiner la quantité d'angles & de lignes qu'on doit néceſſairement meſurer dans une figure quelconque, pour en faire une autre qui lui ſoit propor-

tionnelle. Ce feroit fatiguer le Lecteur que d'entrer dans un plus grand détail.

XLVII.

Les aires des figures femblables font entre elles comme les quarrés des côtés homologues.

ON démontreroit, par des raifonnemens femblables à ceux de l'article XLIII, que le nombre des quarrés X que contient la figure ABCDE, eft le même que celui des quarrés *x* renfermés dans la figure *abcde*; & qu'ainfi, les aires des figures femblables font entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XLVIII.

Les figures femblables ne font différenciées que par les échelles fur lefquelles elles font conftruites.

TOUT ce qui vient d'être dit fur les figures femblables, peut fe réduire à ce feul & unique principe, que les figures femblables ne font différenciées que par les échelles fur lefquelles elles font conftruites.

XLIX.

MAINTENANT, pour mieux fen-

tir l'uſage qu'on doit faire des triangles ſemblables & des réductions, pour avoir la meſure des terreins ſur leſquels on ne pourroit pas commodément opérer, figurons-nous que ABCDEF repréſente le contour d'un parc, d'un étang, &c. dont on voudra déterminer l'étendue. D'abord on meſurera un des côtés de la figure, FE, par exemple, & l'on verra combien ce côté aura de toiſes, de perches, &c. enſuite prenant telle échelle qu'on voudra, on tracera ſur un papier ou ſur un carton, une ligne *fe*, égale à autant de parties de l'échelle, que FE contiendra de toiſes, de perches, &c. puis faiſant les angles *def*, *dfe* égaux aux angles DEF, DFE, on aura le triangle *edf*, dans lequel on abaiſſera *eg* perpendiculaire ſur *df*: cela fait, & les lignes *df* & *eg* meſurées par le moyen de l'échelle, on conclura qu'autant que ces lignes contiendront de parties réduites, autant DF & EG contiendront de toiſes,

PLAN. V. FIG. 1 & 2.

de perches, &c. Ainſi, en multipliant DF par la moitié de EG, on aura la valeur du triangle EDF; & meſurant de la même maniere chacun des autres triangles DCF, BCF, ABF, l'aire de la figure entiere ſe trouvera déterminée.

L.

Maniere de meſurer la diſtance d'un lieu inacceſſible.

Il arrive ſouvent que dans la pratique, il faut meſurer la diſtance du lieu F où l'on eſt placé, à un autre lieu où quelque obſtacle empêche qu'on ne ſe tranſporte; nouveau problême, mais dont la ſolution eſt déja donnée d'avance dans l'article qui précéde celui-ci. Car puiſque pour meſurer DF, on n'a eu beſoin que de la ſimilitude des triangles *def*, & DEF, il eſt clair que ſi on meſure une baſe quelconque EF, & que des points F & E on puiſſe appercevoir le point D, le problême ſera réſolu, c'eſt-à-dire, qu'on aura la diſtance FD.

L I.

L'USAGE qu'on peut faire des inſtrumens particuliers, tels que *b* A *c*, Fig. 3. que j'ai dit, (Article XXVIII.) composé de deux branches unies au point A, autour duquel elles ont la liberté de tourner, expoſe ſouvent à bien des mécomptes. Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le tranſport; tantôt la forme qu'on eſt obligé de donner à l'inſtrument pour en faciliter l'uſage, empêchera qu'on ne puiſſe l'appliquer ſur le plan où devra ſe faire la réduction.

Ajoutons à cela, que chaque nouvel angle B A C, qu'on prend de cette façon, demande qu'on tranſporte de nouveau l'inſtrument ſur le papier, & que la ſeule reſſource qu'on ait pour comparer deux angles, c'eſt de les poſer l'un ſur l'autre, ſans que, par ce moyen, on puiſſe avoir au juſte ni leur rapport, ni leur grandeur abſolue.

LII.

Il étoit donc néceſſaire de chercher une meſure fixe pour les angles, comme on en avoit déja une pour les longueurs. Or cette meſure qu'il falloit avoir, il a été facile de la trouver. Car que A*b* reſtant fixe on lui applique d'abord le côté A*c*, qu'enſuite on faſſe tourner ce côté autour de A, il eſt clair que ſi on adapte à l'extrémité *c* de la branche mobile A*c*, ou une plume ou un crayon, qui donne moyen de rendre ſenſible la trace du point *c*, cette trace qui formera un arc de cercle, donnera exactement la meſure de l'angle pour chaque ouverture particuliere des côtés A*b*, A*c*; c'eſt-à-dire, qu'à cauſe de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera néceſſairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de *c*A*b*, répondra un arc double, triple, quadruple de *cb*.

Fig. 4.

Un angle a pour meſure l'arc de cercle qu'interceptent ſes côtés.

LIII.

SUPPOSANT donc que la circonférence *bcdfg*, décrite par la révolution entiere du point *c*, ſoit diviſée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes A*c* & A*b*, meſurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle *c*A*b* qu'elles formeront.

Les Géometres ſont convenus de diviſer le cercle en 360 parties qu'on appelle degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 ſecondes, &c. Ainſi, un angle *b*A*c*, par exemple, aura 70 degrés 20 minutes, ſi l'arc *bc* qui lui ſervira de meſure, a 70 des 360 parties du cercle, & de plus 20 ſoixantiémes parties d'un degré.

Le cercle eſt partagé en 360 degrés ; chaque degré en 60 minutes, &c.

LIV.

DE-là il ſuit qu'un angle CAB de 90 degrés, nommé communément

FIG. 5. L'angle droit a 90

degrés ; & ses côtés sont perpendiculaires l'un à l'autre.

angle droit, est celui dont les côtés AC & AB interceptent le quart BC de la circonférence, & sont perpendiculaires l'un à l'autre.

LV.

Un angle aigu est plus petit qu'un angle droit.

Fig. 6.

On appelle angle aigu, tout angle plus petit qu'un angle droit, ou qui a moins de 90 degrés. Tels sont les angles CAB, FAG, EAG.

LVI.

Un angle obtus est plus grand qu'un angle droit.

Au contraire, on appelle angle obtus, celui qui a plus de 90 degrés, comme FAB.

LVII.

La somme des angles, faits du même côté sur une ligne droite, & qui ont le même sommet, vaut 180 degrés.

Il est évident que tous les angles, comme GAF, FAE, EAC, CAB, qu'on peut faire du même côté sur une ligne droite GB, & qui ont le même sommet A, sont égaux pris ensemble à 180 degrés, ou à deux angles droits, mesurés par la demi-circonférence.

LVIII.

DE même, la ſomme de tous les angles EAF, FAB, BAC, CAD, DAE, qu'on peut faire autour du point A, qui leur ſert de ſommet commun, eſt égale à 360 degrés, ou à quatre angles droits, meſurés par la circonférence entiere BCDEF.

FIG. 7. Tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point, ſont égaux, pris enſemble, à quatre droits.

LIX.

APRÈS avoir trouvé que les angles ont les parties du cercle pour meſure, voyons comment on s'y prend pour déterminer ce qu'un angle qu'on veut meſurer contient de degrés.

On ſe ſert d'un inſtrument I, qu'on appelle demi-cercle : cet inſtrument eſt compoſé de deux régles EAC, DAB d'égale longueur, qui ſe croiſent en A, & qui ſont chargées de pinnules à leurs extrémités. L'une de ces régles EC, qu'on nomme alidade, eſt mobile autour de A, & l'autre DB eſt fixe, &

FIG. 8. Uſage de l'inſtrument appellé demi-cercle, pour prendre la grandeur d'un angle.

ſert de diametre à un demi-cercle DCB diviſé en 180 degrés, &c.

Or veut-on connoître l'angle que forment deux lignes droites tirées du lieu où l'on eſt, à deux objets quelconques F, G, on place d'abord la regle fixe DAB, de maniere que l'œil placé en D, apperçoive un des deux objets F, par les deux pinnules D & B : enſuite, ſans remuer l'inſtrument, on tourne l'alidade, juſqu'à ce que l'œil placé en E, apperçoive l'autre objet G, par les pinnules E & C; & alors l'alidade marque ſur le demi-cercle gradué, le nombre des degrés, minutes, &c. que contient l'angle propoſé GAF.

L X.

Uſage du rapporteur, pour faire un angle d'un nombre déterminé de degrés.

* Fig. 9.

Si on veut faire ſur le papier un angle, d'un nombre déterminé de degrés, on ſe ſert d'un inſtrument K *, diviſé en 180 degrés, qu'on appelle rapporteur, ou tranſporteur, & poſant le centre A ſur la pointe de l'an-

gle qu'on veut tracer, & la ligne AB ſur la ligne AG qu'on prend pour un des côtés de l'angle, on marque le point C qui répond au nombre des degrés qu'on veut donner à l'angle propoſé, puis par ce point & par le centre A, tirant la ligne ACO, on a l'angle OAG, qui contient le nombre de degrés demandé.

LXI.

SUPPOSONS maintenant qu'ayant pris une baſe FG ſur le papier, on veuille faire ſur cette baſe un triangle FGH, ſemblable au triangle ABC pris ſur un terrein. On ſe ſervira du demi-cercle pour ſavoir ce que chacun des angles CAB, CBA contiendra de degrés; enſuite, par le moyen du rapporteur, on fera les angles HFG & HGF reſpectivement égaux aux angles CAB & CBA; & parce qu'alors le point H auquel les côtés FH & GH ſe réuniront, ſera néceſſaire- PLAN. VI. FIG. 1 & 2.

ment déterminé par l'opération, auſſi-bien que l'angle FHG, on aura le triangle FGH, entiérement ſemblable au triangle ABC.

LXII.

COMME il importe dans la pratique, ainſi que nous l'avons déja dit, que les angles ſoient exactement meſurés, il ne faut pas ſe contenter de les prendre, même avec les inſtrumens les plus parfaits, il faut encore trouver le moyen de vérifier leurs meſures, pour en faire la correction, s'il étoit néceſſaire. Or ce moyen eſt ſimple & facile. Reprenons le triangle ABC. On ſent que la grandeur de l'angle C doit réſulter de celles des angles A & B; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la poſition des lignes CA, BC changeroit, & par conſéquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or ſi cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit pré-

ſumer que ce que les angles A & B renferment de degrés, doit déterminer le nombre des degrés que doit renfermer l'angle C; & qu'ainſi il pourra ſervir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puiſqu'on ſera ſûr qu'on aura bien meſuré les angles A & B, ſi en meſurant enſuite l'angle C, on lui trouve le nombre des degrés qui lui conviendront relativement à la grandeur des angles A & B.

Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, ſi les lignes AC, BC venoient, ou à s'approcher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Suppoſons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB pour s'approcher de BE, il eſt clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement; & qu'au contraire, l'angle C ſe reſſerreroit FIG. 3.

de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C seroit toujours la même, quelle que fût l'inclinaison des lignes AB, BC, sur la ligne AE.

LXIII.

Fig. 4.

Les angles alternes sont les angles renversés que forme, de part & d'autre, une ligne droite qui tombe sur deux paralleles.

Or cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ; car qu'on mene ID parallele à AC, on verra premiérement, que les angles ACB & CBD, appellés angles alternes, seront égaux : ce qui est évident, puisque les lignes AC & IB étant paralleles, elles seront également inclinées sur CBO ; & qu'ainsi l'angle IBO égalera l'angle ACB. Mais l'angle IBO égalera aussi l'angle CBD, parce que la ligne ID ne sera pas plus inclinée sur CO d'un côté que de l'autre. Donc l'angle DBC égal à l'angle IBO, égalera l'angle ACB, son alterne.

Ces angles sont égaux.

LXIV.

LXIV.

On verra, en second lieu, que l'angle CAE sera égal à l'angle DBE, à cause des paralleles CA & DB. Donc les trois angles du triangle pourroient être mis à côté les uns des autres, & unis par leurs sommets aux points B; & alors on verroit que les trois angles DBE, CBD & CBA, qui égaleroient les trois angles CAB, ACB & CBA, seroient égaux à deux angles droits (Article LVII.) Or, comme tout ce que nous venons de dire, pourra également s'appliquer à quelque triangle que ce soit, on sera assuré de cette propriété générale, que la somme des trois angles d'un triangle est constamment la même, & qu'elle est égale à celle de deux droits, ou, ce qui revient au même, à 180 degrés.

La somme des trois angles d'un triangle est égale à celle de deux angles droits.

LXV.

Donc, pour conclure la valeur du

troisiéme angle d'un triangle, lorsqu'on en aura mesuré deux, il faudra retrancher de 180 degrés le nombre des degrés que les deux angles feront ensemble : propriété qui donne une maniere bien commode de vérifier la mesure des angles d'un triangle, & dont on verra une infinité d'autres utilités, à mesure qu'on avancera. Nous nous contenterons ici d'en tirer les conséquences les plus immédiates.

LXVI.

Un triangle ne peut avoir plus d'un angle droit ; à plus forte raison, ne peut-il avoir plus d'un agle obtus.

LXVII.

Si l'un des trois angles d'un triangle est droit, la somme des deux autres angles est toujours égale à un droit.

Ces deux propositions sont si claires, qu'elles n'ont pas besoin d'être démontrées.

LXVIII.

Si on prolonge un des côtés du triangle ABC, par exemple, le côté AB, l'angle extérieur CBE vaudra ſeul les deux angles intérieurs oppoſés BCA & CAB. Car qu'à l'angle CBA on ajoute, ou les deux angles BCA & CAB, ou l'angle CBE, la ſomme ſera toujours égale à 180 degrés, ou à deux angles droits (Article LXIV.)

L'angle extérieur d'un triangle, vaut les deux angles intérieurs oppoſés.

LXIX.

Connoissant un des angles d'un triangle iſoſcele ABC, on connoît les deux autres.

Fig. 5.

Qu'on ait l'angle au ſommet A, il eſt clair que ſi on retranche le nombre des degrés que contiendra cet angle, des 180 degrés, meſure des trois angles du triangle, la moitié de la ſomme qui reſtera, ſera la meſure de chacun des angles B & C, pris ſur la baſe.

Un angle d'un triangle iſoſcele donne les deux autres.

Si c'étoit un des deux angles B ou C pris ſur la baſe, qu'on connût, le double de ſa valeur retranché de 180 degrés, donneroit l'angle au ſommet A.

LXX.

Les angles d'un triangle équilatéral ſont chacun de 60 degrés.

COMME un triangle équilatéral n'eſt autre choſe qu'un triangle iſoſcele auquel chacun de ſes côtés peut également ſervir de baſe, il eſt clair que ſes trois angles ſont néceſſairement égaux, & qu'ils valent chacun 60 degrés, tiers de 180 degrés.

LXXI.

Deſcription de l'exagone.

DE-là ſe tire aiſément la deſcription de l'exagone, ou polygone de ſix côtés, que nous avions promiſe (Article XXIV.)

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en ſix parties égales, il faudra que cette ligne ſoit la corde d'un arc de 60 degrés, ſixiéme partie de 360 degrés, valeur de la circonférence entiere. Suppoſant donc

que AB ſoit cette corde, & du centre I menant aux extrémités A & B les rayons AI & IB, l'angle AIB vaudra 60 degrés; & parce que les deux côtés AI & IB seront égaux, le triangle AIB ſera iſoſcele. Donc l'angle au ſommet étant de 60 degrés, chacun des deux autres angles vaudra auſſi 60 degrés, moitié de 120. Donc (Article LXX.) le triangle AIB ſera équilatéral. Donc AB égalera le rayon du cercle. D'où il ſuit que, pour décrire un exagone, il faudra ouvrir le compas d'un intervalle égal au rayon, & le porter ſix fois de ſuite ſur la circonférence, & l'on aura les ſix côtés de l'exagone. FIG. 6.

LXXII.

L'EXAGONE ABCDEF décrit, on décrira facilement le dodécagone, ou polygone de douze côtés.

Pour cela on diviſera l'arc AKB, ou l'angle AIB, en deux parties égales; La moitié de l'angle au centre

de l'exagone donne l'angle au centre du dodécagone.

& AK, corde de la moitié de l'arc AKB, ſera un des côtés du dodécagone.

LXXIII.

Partager un angle en deux également.

Or, pour partager l'arc AKB en deux arcs égaux AK & KB, on fera la même opération que s'il s'agiſſoit de couper la corde AB en deux parties égales ; c'eſt-à-dire, que des points A & B, comme centres, & d'un intervalle quelconque, on décrira les arcs MLN, OLP; enſuite, par le point L, ſection des deux arcs, & par le centre I, on menera la ligne LI, qui diviſera en deux, & l'arc AKB & la corde AB.

LXXIV.

Deſcription des polygones de 24, 48, &c. côtés.

Qu'on ſuive la méthode précédente, & qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux, la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs ſera le côté du polygone de 24 côtés. On aura de mê-

me les polygones de 48, 96, 192, &c. côtés.

LXXV.

MAINTENANT, pour décrire un octogone, c'est-à-dire, un polygone de 8 côtés, on commencera par tracer un quarré dans le cercle; ce qu'on fera, si, après avoir mené deux diametres AIB & CIE, qui se coupent à angles droits, on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE & AE.

Description de l'octogone.

FIG. 71.

Car, à cause de la régularité du cercle, & de l'égalité des quatre angles que forment les perpendiculaires AIB & CIE, les quatre côtés AC, CB, BE & EA, seront nécessairement égaux, & se trouveront également penchés les uns sur les autres; ce qui ne pourra convenir qu'au quarré.

Le quarré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, &c. en deux

parties égales ; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

Et des polygones de 16, 32, &c. côtés.

Qu'on partageât de même chacun des arcs CK, KB, &c. en 2, en 4, en 8, &c. parties égales, on auroit les polygones de 16, 32, 64, &c. côtés.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

SECONDE PARTIE.

De la Méthode géométrique de comparer les figures rectilignes.

SI on a fait attention à ce que nous avons dit, pour montrer comment on est parvenu à mesurer les terreins, on a dû reconnoître que les positions des lignes les unes à l'égard des autres, fournissoient des remarques di-

gnes d'attention par elles-mêmes, indépendamment de l'utilité dont elles pouvoient être dans la pratique ; & il est à présumer que ces remarques ont engagé les premiers Géometres à pousser plus loin leurs découvertes ; car ce ne sont pas seulement les besoins qui déterminent les hommes, la curiosité est souvent un aussi grand motif pour exciter leurs recherches.

Ce qui a dû contribuer encore au progrès de la Géométrie, c'est le goût qu'on a naturellement pour cette précision rigoureuse, sans laquelle l'esprit n'est jamais satisfait.

Aussi lorsqu'en mesurant les figures, on s'est apperçu que dans une infinité de cas, les échelles & les demi-cercles ne donnoient que des valeurs approchées des lignes ou des angles, on a cherché des méthodes qui suppléassent au défaut de ces instrumens.

Ici nous reprendrons les figures rectilignes ; mais dans les opérations que

nous ferons pour découvrir leurs justes rapports, nous ne nous servirons que de la régle & du compas.

Il arrive souvent qu'on a besoin, ou de rassembler dans une même figure plusieurs figures qui lui soient semblables, ou de décomposer une figure en d'autres figures de même espece ; ce qu'on peut faire en opérant d'abord sur les rectangles, puisque toutes les figures rectilignes ne sont que des assemblages de triangles, & que chaque triangle est la moitié d'un rectangle qui a même hauteur & même base.

I.

POUR comparer les rectangles, il faut savoir changer un rectangle quelconque en un autre qui ait la même superficie, mais dont la hauteur soit différente. Car lorsque deux rectangles seront changés en deux autres de même hauteur, ils ne différeront plus que par leurs bases; le plus grand sera celui

qui aura la plus grande baſe, & il contiendra le plus petit, de la même maniere que ſa baſe contiendra celle du plus petit rectangle; ce qu'on énonce ordinairement ainſi, deux rectangles qui ont même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

Deux rectangles qui ont même hauteur, ſont en même raiſon que leurs baſes.

I I.

Pour ajouter ces deux rectangles, il ne faudra que les poſer l'un à côté de l'autre.

I I I.

Il ne ſera pas plus difficile de retrancher le plus petit du plus grand.

I V.

Et pour partager un rectangle en un nombre déterminé de rectangles égaux, il faudra couper ſa baſe en un pareil nombre de parties égales, enſuite élever des perpendiculaires ſur les points de diviſion.

V.

MAINTENANT ſoit propoſé de changer le rectangle ABCD en un autre BFEG, qui ait la même ſuperficie & dont la hauteur ſoit BF, on remarquera que puiſque ſa valeur ſera le produit de ſa hauteur par ſa baſe, il faudra que le rectangle cherché BFEG, dont la hauteur ſera plus grande que BC, ait ſa baſe plus petite que AB: c'eſt-à-dire, que ſi BF, par exemple, eſt double de BC, il faudra que BG ne ſoit que la moitié de AB.

PLAN. VII. FIG. 1.

Maniere de changer un rectangle en un autre, qui ait une hauteur donnée.

Si BF étoit le triple de BC, BG ne ſeroit que le tiers de AB.

On verroit de même que ſi BF, au lieu de contenir BC un nombre exact de fois, le contenoit avec fraction, comme deux fois & un tiers, le rectangle BFEG ne pourroit être égal au rectangle ABCD, que ſa baſe BG ne fût auſſi contenue deux fois & un tiers dans la baſe AB. Et en général, il ſera

aisé de voir, qu'afin que deux rectangles ABCD & BFEG soient égaux, il faudra que la base BG de l'un soit contenue dans la base AB de l'autre, comme la hauteur BC dans la hauteur BF.

Il ne s'agira donc plus que de diviser la ligne AB, de maniere que AB soit à GB, comme BF à BC; ce qui se fera (I. Part. Art. XLI.) en menant la ligne FA, & du point donné C, la parallele CG.

VI.

Seconde maniere de changer un rectangle en un autre, dont la hauteur soit donnée.

Fig. 2.

Pour changer le rectangle ABCD en un autre rectangle BFEG qui ait une hauteur donnée BF, on peut employer une méthode moins naturelle que la précédente, mais plus commode. Ayant prolongé AD jusqu'à ce qu'elle rencontre en I la droite FEI, menée par le point F parallelement à AB, on tirera la diagonale BI, & par le point O où elle rencontrera le côté DC, on menera GOE parallele à FB;

& le rectangle BFEG sera égal au rectangle ABCD.

Pour le prouver, il suffira de faire voir qu'en ôtant des rectangles ABCD & BFEG la partie commune OCBG, le rectangle ADOG égalera le rectangle EOCF.

Or si on fait attention à l'égalité des deux triangles IBF & IBA, on verra qu'en retranchant de ces triangles des quantités égales, les restes seront égaux. Mais le triangle IAB deviendra le rectangle ADOG, si on en retranche les deux triangles IDO & OGB: de même le triangle IBF deviendra le rectangle EOCF, par le retranchement des triangles IEO & OBC égaux aux deux premiers. Donc les deux rectangles ADOG & EOCF, restes des deux triangles, seront égaux entr'eux, aussi-bien que les rectangles ABCD & BFEG.

VII.

CETTE seconde maniere de changer On démon-

tre rigoureusement que si deux rectangles sont égaux, la base du premier est à la base du second, comme la hauteur du second, à la hauteur du premier.

un rectangle en un autre, confirme le principe que suppose la premiere, & qui auroit pû sembler n'être appuyé que sur une simple induction.

De l'égalité des deux rectangles ABCD & BFEG, on avoit conclu qu'il falloit que AB fût à BG, comme BF à BC; c'est ce qu'on peut maintenant prouver par l'article précédent.

Car les triangles IAB & OGB, étant manifestement semblables, la base AB du grand, sera à la base GB du petit, comme la hauteur IA à la hauteur OG; ou comme BF à BC leurs égales. Donc AB sera à GB, comme BF à BC, conformément au principe de l'article V.

VIII.

De la maniere dont on vient de s'y prendre pour démontrer que de l'égalité des deux rectangles ABCD & BFEG, il suit que la hauteur BF est à la hauteur BC, comme la base AB à la

la baſe BC, on démontreroit auſſi que lorſque quatre lignes BF, BC, AB & BG, ſeront telles que la premiere ſera à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme, le rectangle qui auroit pour hauteur & pour baſe la premiere & la quatriéme de ces lignes, ſeroit égal au rectangle qui auroit pour hauteur & pour baſe la ſeconde & la troiſiéme.

Si quatre lignes ſont telles que la premiere ſoit à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme, le rectangle formé par la premiere & par la quatriéme ſera égal à celui que forment la ſeconde & la troiſiéme.

IX.

LORSQUE quatre quantités, ainſi que les lignes précédentes BF, BC, AB & BG, ſont telles que la premiere eſt à la ſeconde, comme la troiſiéme à la quatriéme, on dit que ces quatre quantités ſont en proportion, ou qu'elles forment une proportion. Ainſi, 6, 9, 18 & 27, ſont en proportion, parce que 6 eſt contenu dans 9, de la même maniere que 18 eſt contenu dans 27. Il en eſt de même de 15, 25, 75 & 125, &c.

Quatre quantités, dont la premiere eſt à la ſeconde comme la troiſiéme à la quatriéme, ſont dites former une proportion.

X.

Des quatre termes d'une proportion, le premier & le quatriéme ſont nommés extrêmes ; on nomme moyens le ſecond & le troiſiéme.

La premiere & la quatriéme des quatre quantités d'une proportion, s'appellent termes extrêmes, ou ſimplement, extrêmes ; la ſeconde & la troiſiéme ſe nomment termes moyens, ou ſimplement, moyens.

En ſe ſervant des définitions précédentes, il eſt clair que les propoſitions renfermées dans les articles VII & VIII, s'énonceront ainſi :

X I.

Dans une proportion, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

Lorsque quatre quantités ſont en proportion, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

X I I.

Si le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, les quatre termes forment une proportion.

Si quatre quantités ſont telles que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, ces quatre quantités ſeront en proportion.

XIII.

Il eſt à propos de faire beaucoup d'attention aux deux articles précédens; ils ſont d'un grand uſage : on en déduit, entr'autres choſes, la démonſtration de la Regle qu'on appelle en Arithmétique, Regle de trois. Pour donner une idée de cette Regle, nous prendrons un exemple; c'eſt la maniere la plus ſimple de ſe faire entendre.

De-là on tire la Regle de trois.

Suppoſons que 24 Ouvriers ayent fait 30 toiſes d'ouvrage en un certain tems, on demande combien 64 Ouvriers en feront dans un tems égal.

Il eſt évident que pour réſoudre la queſtion, il faut trouver un nombre qui ſoit à 64, dans la même raiſon que 30 à 24. Or, ſuivant ce que nous avons vû, ce nombre ſera tel que ſon produit par 24 égalera le produit de 30 par 64. Mais le produit de 30 par 64 eſt 1920. Donc le nombre cherché ſera celui qui étant multiplié par 24 donnera 1920.

Or pour peu qu'on ait d'idée des opérations de l'Arithmétique, on doit aisément s'appercevoir qu'il faudra que ce nombre soit le quotient de la division de 1920 par 24, c'est-à-dire 80.

Ou la maniere de trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont donnés.

En général, pour trouver le quatriéme terme d'une proportion, dont les trois premiers seront donnés, il faudra prendre le produit du second & du troisiéme, & diviser ce produit par le premier terme de la proportion.

XIV.

Un exemple aussi simple que celui que nous venons de choisir, ne fait peut-être pas assez sentir la nécessité de la méthode précédente. Le bon sens seul feroit trouver le nombre demandé. On voit que 30 surpasse 24 d'un quart, & qu'ainsi il faut que le nombre cherché surpasse 64 d'un quart; ce qui donne 80. Mais il y a des cas où l'on pourroit chercher plus long-tems le rapport des deux premiers nombres de la proportion.

Par exemple, on veut un quatriéme terme proportionnel aux trois nombres 259, 407 & 483.

Pour le trouver par la méthode précédente, il faut multiplier 483 par 407, & diviſer 196581, qui en eſt le produit, par 259; ce qui donne 759 pour le quatriéme terme cherché.

Si on s'y étoit pris autrement pour trouver ce terme, ce n'auroit pû être qu'en tâtonnant. On auroit bien pû découvrir, par exemple, que 148, excès de 407 ſur 259, contient quatre des ſeptiémes parties de 259; qu'ainſi il falloit ajouter de même à 483, le nombre 276, qui contient quatre de ſes ſeptiémes parties. Mais la généralité & la ſûreté de la méthode précédente nous ſauve toujours de l'embarras des tâtonnemens, qui même deviendroient inutiles dans bien des cas.

X V.

LORSQU'ON aura deux quarrés à

ajouter, leur addition ſe fera de la même maniere que celle de deux rectangles, puiſque les quarrés ſont des rectangles dont la hauteur & la baſe ſont égales. On changera donc un des quarrés, le plus petit, par exemple, en un rectangle qui aura le côté du grand pour hauteur, & les deux quarrés ne feront plus qu'un rectangle. On pourroit donner de même la hauteur du petit quarré à tous les deux, ou une autre hauteur à volonté ; mais ce qu'on ne pouvoit guère manquer de ſe propoſer, lorſqu'on a voulu réduire ainſi deux quarrés en une ſeule figure, c'étoit de faire un quarré égal à deux autres. Problême dont il étoit aiſé de trouver la ſolution ſuivante.

XVI.

FIG. 3. Faire un quarré double d'un autre.

SUPPOSONS d'abord que les deux quarrés ABCD & CBFE dont on ſe propoſe de faire un ſeul quarré, ſoient égaux entr'eux ; il eſt aiſé de remarquer

que ſi on tire les diagonales AC & CF, les triangles ABC & CBF feront enſemble la valeur d'un quarré. Donc en tranſportant au-deſſous de AF les deux autres triangles DCA & CEF, on fera le quarré ACFG dont le côté AC ſera la diagonale du quarré ABCD, & dont la ſuperficie égalera celle des deux quarrés propoſés ; ce qui n'a pas beſoin d'être démontré.

XVII.

SUPPOSONS préſentement qu'on veuille faire un quarré égal à la ſomme des deux quarrés inégaux ADC*d* & CFE*f*, ou, ce qui revient au même, qu'on ſe propoſe de changer la figure ADFE*fd* en un quarré.

FIG. 48.
Faire un quarré égal à deux autres pris enſemble.

En ſuivant l'eſprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'eſt point poſſible de trouver dans la ligne DF quelque point H, tel,

1°. Que tirant les lignes AH & HE, & faiſant tourner les triangles ADH

& EFH autour des points A & E, jusqu'à ce qu'ils ayent les positions A *dh* & E *fh*, ces deux triangles se joignent en *h*.

2°. Que les quatre côtés AH, HE, E*h* & *h*A soient égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point H se trouvera en faisant DH égal au côté CF ou EF. Car de l'égalité supposée entre DH & CF, il suit premierement que si on fait tourner ADH autour de son angle A, en sorte qu'on lui donne la position A *dh*, le point H arrivé en *h*, sera distant du point C d'un intervalle égal à DF.

De la même égalité supposée entre DH & CF, il suit encore que HF égalera DC, & qu'ainsi le triangle EFH tournant autour de E pour prendre la position E *fh*, le point H arrivera au même point *h*, distant de C d'un intervalle égal à DF.

Donc la figure ADFE*fd* sera changée en une figure de quatre côtés

AHE*h*. Il ne s'agit donc plus que de voir ſi les quatre côtés ſeront égaux & perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés eſt évidente, puiſque A*h* & *h*E ſeront les mêmes que AH & HE; & que l'égalité de ces deux derniers ſe tirera de ce que DH étant égal à CF ou à FE, les deux triangles ADH & HEF ſeront égaux & ſemblables.

Il ne reſte donc plus qu'à voir ſi les côtés de la figure AHE*h* formeront des angles droits; c'eſt de quoi il eſt aiſé de s'aſſurer, en remarquant que pendant que HAD tournera autour de A, pour arriver en *h*A*d*, il faudra que le côté AH faſſe le même mouvement que le côté AD. Or le côté AD fera un angle droit DA*d*, en devenant A*d*. Donc le côté AH fera auſſi un angle droit HA*h*, en devenant A*h*.

Quant aux autres angles H, E & *h*, il eſt viſible qu'ils ſeront néceſſairement droits. Car il ne ſeroit pas poſſible

qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, ſans que les trois autres fuſſent pareillement droits.

XVIII.

L'hypoténuſe d'un triangle rectangle eſt ſon grand côté.

Et le quarré de ce côté eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres.

Si on remarque que les deux quarrés ADC*d* & CFE*f* ſont faits, l'un ſur AD, moyen côté du triangle ADH, l'autre ſur EF égal à DH, petit côté du même triangle ADH; & que le quarré AHE*h* égal aux deux autres, eſt décrit ſur le grand côté AH, qu'on nomme communément l'hypoténuſe du triangle rectangle; on découvrira bientôt cette fameuſe propriété des triangles rectangles, que le quarré de l'hypoténuſe eſt égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux autres côtés.

XIX.

Fig. 5 & 6.

D'où ſe tire une maniere ſimple de réduire

Donc lorſque de deux quarrés HDLK & ABCD on n'en voudra faire qu'un ſeul, il ſera inutile de les mettre à côté l'un de l'autre & de

les décompoſer, comme on a fait dans l'article XVII. Il ſuffira de placer leurs côtés AD & DH de façon qu'ils faſſent un angle droit, & de tirer enſuite la ligne AH, puiſqu'alors cette ligne ſera le côté du quarré cherché AHIE.

deux quarrés en un ſeul.

FIG. 7.

XX.

Si on avoit deux figures ſemblables DAFGM & DHPON, & qu'on ſe propoſât d'en faire une troiſiéme, égale en ſuperficie aux deux autres priſes enſemble, il ne faudroit que poſer les baſes AD & HD de ces figures, ſur les deux côtés d'un angle droit ADH, & l'hypoténuſe AH du triangle ADH ſeroit la baſe de la figure demandée.

FIG. 8 & 9.

FIG. 10.

Si les côtés d'un triangle rectangle ſervent de baſes à trois figures ſemblables, la figure faite ſur l'hypoténuſe égalera les deux autres priſes enſemble.

Pour en voir la raiſon, qu'on imagine les quarrés ABCD, DHKL & AHIE faits ſur les baſes des trois figures ſemblables, on verra d'abord par l'article XVIII, que le quarré AHIE vaudra lui ſeul les deux autres quarrés ABCD & DHKL. Or les figures

ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, (I. Part. Art. XLVII.) Donc les trois quarrés ABCD, DHKL & AHIE ſe trouveront les mêmes parties des figures DAFGM, DHPON & AHQRS.

D'où il ſera aiſé de conclure que la figure AHQRS vaudra les deux autres. Suppoſons, par exemple, que chacun de ces quarrés fût la moitié de la figure dans laquelle il ſeroit renfermé, perſonne ne douteroit que la figure AHQRS ne fût égale aux deux autres, puiſque ſa moitié vaudroit ſeule les moitiés des deux figures DHPON & DAFGM. Il en ſeroit de même ſi les quarrés ABCD, DHKL & AHIE, étoient les deux tiers, les trois quarts, &c. des figures DAFGM, DHPON & AHQRS.

XXI.

Si on ſe propoſoit d'ajouter trois,

quatre, &c. figures ſemblables, ou, ce qui revient au même, trois, quatre, &c. quarrés, la méthode feroit toujours la même. Qu'on voulût, par exemple, en ajouter trois, on feroit d'abord un quarré égal aux deux premiers; enſuite, à ce nouveau quarré on ajouteroit le troiſiéme, & par-là on auroit un quarré égal aux trois quarrés propoſés.

Réduire pluſieurs figures ſemblables à une ſeule.

XXII.

De-là il ſuit que ſi on ſe propoſoit de faire un quarré, cinq, ſix, &c. fois plus grand qu'un autre, il ſuffiroit de ſuivre la méthode précédente pour réſoudre ce problême, & même ſon inverſe; c'eſt-à-dire pour faire un quarré qui ne feroit que la cinquiéme, la ſixiéme, &c. partie d'un quarré propoſé; ce qui demanderoit ſimplement qu'on ſe rappellât la maniere de trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données. Mais dans la

troiſiéme Partie de cet Ouvrage, nous donnerons une méthode plus directe & plus commode pour réſoudre ces ſortes de problêmes.

XXIII.

L'ADDITION des figures ſemblables fournit une preuve déciſive de la néceſſité d'abandonner les échelles, quand on veut faire les opérations d'une maniere qui puiſſe ſe démontrer rigoureuſement.

Suppoſons, par exemple, qu'on eût à faire un quarré double d'un autre, ceux qui ne ſauroient pas la méthode donnée dans l'article XVI, s'y prendroient vraiſemblablement de la maniere ſuivante.

Ils diviſeroient le côté du quarré donné en un grand nombre de parties, en 100 parties, par exemple; enſuite multipliant 100 par 100, ils trouveroient 10000 pour la valeur du quarré; ce qui donneroit 20000

pour celle du quarré demandé.

Mais de la valeur de celui-ci, ils ne tireroient pas la maniere de le décrire, il faudroit qu'ils eussent son côté exprimé par un nombre, & que ce nombre fût tel qu'en le multipliant par lui-même, c'est-à-dire en le quarrant, le produit donnât 20000.

Le produit qui résulte de la multiplication d'un nombre par lui-même est le quarré de ce nombre.

Or ce nombre dont ils auroient besoin, ce seroit en vain qu'ils le chercheroient sur une échelle dont les parties seroient des centiémes du côté du premier quarré; car 141, multiplié par lui-même, donneroit 19881, & 142 donneroit 20164; ce qui s'écarteroit de part & d'autre du nombre qu'ils devroient trouver.

Peut-être s'imagineroient-ils qu'en partageant le côté du quarré donné en plus de 100 parties, ils trouveroient un nombre déterminé de ces parties pour le côté du quarré double du premier; mais quelques essais qu'ils

puſſent faire, ils trouveroient toujours que ce ſeroit en vain qu'ils chercheroient deux nombres, dont un exprimeroit le côté, ou, ſuivant le langage ordinaire, la racine d'un quarré, & l'autre, le côté, ou la racine du quarré double.

La racine d'un quarré eſt le nombre qui, multiplié par lui-même, donne ce quarré.

XXIV.

En effet, on démontre en Arithmétique, que ſi deux nombres ne ſont pas multiples l'un de l'autre, c'eſt-à-dire, ſi l'un ne contient pas l'autre un nombre exact de fois, le quarré du plus grand ne ſera pas non plus multiple du quarré du plus petit. Ainſi 5, par exemple ne pouvant pas ſe diviſer exactement par 4, ſon quarré 25 ne pourra pas non plus ſe diviſer par 16 quarré de 4.

Un nombre eſt multiple d'un autre, lorſqu'il le contient pluſieurs fois exactement.

Donc ſi on quarre deux nombres, dont l'un ſoit plus grand que l'autre, & en ſoit cependant moins que le double, il viendra, par cette opération

deux

deux autres nombres, dont l'un ſera moindre que le quadruple de l'autre, mais ſans en pouvoir être ni le double, ni le triple. Donc, qu'on diviſe le côté d'un quarré en tel nombre de parties qu'on voudra, le côté du quarré double, qui ſuivant ce qui eſt démontré dans l'article XVI, ſera la diagonale de ce quarré, ne contiendra pas un nombre exact de ces mêmes parties; ce qu'on exprimeroit dans le langage des Géometres, en diſant que le côté du quarré & ſa diagonale ſont incommenſurables.

Le côté d'un quarré & ſa diagonale, ſont incommenſurables.

XXV.

ON peut encore remarquer qu'il y a quantité d'autres lignes qui n'ont aucune commune meſure.

Autres lignes incommenſurables.

Car, qu'on écrive les deux ſuites,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, &c.

dont la premiere exprime les nombres naturels, & l'autre leurs quarrés, on verra que comme les nombres qui seront entre 4 & 9, entre 9 & 16, entre 16 & 25, &c. n'auront aucune racine, les côtés de deux quarrés, dont l'un sera ou triple, ou quintuple, ou sextuple, &c. de l'autre, seront incommensurables entr'eux.

XXVI.

Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourroit-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionalité des figures semblables. On a vû qu'en comparant ces figures (I. Part. Article XXXIV & suiv.) nous avons toujours supposé qu'elles avoient une échelle qui pouvoit également servir à mesurer toutes leurs parties : supposition qui maintenant paroîtroit devoir être limitée, à cause

de ce qui vient d'être dit. Il faut donc que nous revenions ſur nos pas, & que nous examinions ſi nos propoſitions, pour être vraies, n'auroient pas elles-mêmes beſoin de quelques modifications.

XXVII.

REPRENONS d'abord ce qui eſt dit dans l'article XXXIX de la premiere Partie, & voyons s'il eſt exactement vrai que les triangles, tels que *abc* & ABC, dont les angles ſont les mêmes, ayent leurs côtés proportionnels. Suppoſons, par exemple, que la baſe du premier étant *ab*, celle du ſecond ſoit une droite AB égale à la diagonale d'un quarré dont *ab* ſeroit le côté, & cherchons ſi, dans cette ſuppoſition, le rapport de AC à *ac* ſera le même que celui de AB à *ab*. FIG. 11 & 12.

Quoique, ſuivant ce que nous avons vû, quelque grand que pût être le

nombre des parties qu'on ſuppoſeroit arbitrairement dans *ab*, AB ne pourroit jamais contenir un nombre exact de ces parties ; il eſt cependant aiſé de s'appercevoir que plus ce nombre ſera grand, plus AB approchera d'être meſuré exactement avec les parties de *ab*. Suppoſons *ab* diviſé en 100 parties, ce que AB contiendra de ces parties ſe trouvera entre 141 & 142 (Article XXIII.) Contentons-nous de 141, & négligeons le petit reſte; il eſt clair (I. Part. Art. XXXIX.) que AC contiendra auſſi 141 des parties de *ac*.

Suppoſons enſuite *ab* diviſé en 1000 parties, ce que AB contiendra des parties de *ab*, ſera entre 1414 & 1415. Ne prenons que 1414, & négligeons encore le reſte; on trouvera de même que AC contiendra 1414 des milliémes parties de *ac*, & qu'en général AC contiendra toujours autant de parties de *ac*, avec un reſte, que AB con-

tiendra de parties de *ab*, avec un reſte.

De plus, ces reſtes, comme nous venons de l'obſerver, ſeront de part & d'autre d'autant plus petits, que le nombre des parties de *ab* ſera plus grand. Donc il ſera permis de les négliger, ſi on imagine la diviſion de *ab* pouſſée juſqu'à l'infini. Donc on pourra dire alors que le nombre des parties de *ac* que contiendra AC, égalera le nombre des parties de *ab* que contiendra AB, & qu'ainſi AC ſera à *ac*, comme AB à *ab*.

Donc nous avons rigoureuſement démontré que lorſque deux triangles ont les mêmes angles, ils ont leurs côtés proportionnels, ſoit que leurs côtés ayent une commune meſure, ou qu'ils n'en ayent pas.

Les triangles & les figures ſemblables ont leurs côtés proportionnels, lors même que ces côtés ſont incommenſurables.

La propoſition (I. Part. Art. XLV.) d'où ſe tire la proportionalité des lignes qui ſe répondent dans les figures ſemblables, ſe juſtifieroit de la même façon.

XXVIII.

On verra par de pareils raiſonnemens, que les propoſitions expliquées dans les articles XLIV & XLVII de la premiere Partie, où l'on a fait voir que les aires des triangles & des figures ſemblables, ont entr'elles la même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues, ſont toujours vraies en général, même lorſque les côtés de ces figures ſont incommenſurables.

Et ces figures ſont toujours entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Prenons pour exemple les triangles ſemblables ABC, *abc*, dont nous ſuppoſerons les hauteurs incommenſurables avec leurs baſes : dans ce cas, il n'y aura aucun quarré, quelque petit qu'il ſoit, qui puiſſe ſervir de commune meſure à ces triangles & aux quarrés faits ſur leurs baſes ; c'eſt-à-dire, que les aires *abc* & *abde* ſeront incommenſurables entr'elles, ainſi que les aires ABC & ABDE ; mais il

n'en ſera pas moins vrai que le triangle ABC ſera au quarré ABDE, comme le triangle *abc* au quarré *abde*.

C'eſt de quoi on s'aſſurera, en obſervant que plus les parties de l'échelle dont on ſe ſervira pour meſurer AB & KC ſeront ſuppoſées petites, plus on approchera d'avoir les nombres qui exprimeront le rapport de ABC à ABDE. Donc diviſant toujours l'échelle du triangle *abc* dans le même nombre de parties, & négligeant les reſtes, on verra que les mêmes nombres ſerviroient toujours à exprimer le rapport du triangle ABC au quarré ABDE, & celui du triangle *abc* au quarré *abde*. Qu'on pouſſe, par la penſée, la diviſion des échelles juſqu'à l'infini, les reſtes deviendront abſolument nuls; & l'on pourra dire que les nombres qui exprimeroient le rapport du triangle *abc* au quarré *abde*, exprimeroient auſſi le rapport du triangle ABC au quarré ABDE,

& qu'ainſi le triangle *abc* ſera au quarré *abde*, comme le triangle ABC au quarré ABDE.

Il en ſeroit de même de toutes les figures ſemblables.

ÉLÉMENS
DE
GÉOMÉTRIE.

TROISIÉME PARTIE.

De la mesure des figures circulaires, & de leurs propriétés.

APRÈS être parvenu à mesurer toutes sortes de figures rectilignes, on a voulu avoir la maniere de déterminer celles que bornent des lignes courbes. Les terreins, & en général les espaces dont il s'agit de chercher

la mesure, ne sont pas toujours terminés par des lignes droites.

Souvent les figures curvilignes, & les figures mixtes, c'est-à-dire, celles qui sont bornées par des lignes droites & par des lignes courbes, peuvent se réduire à des figures entiérement rectilignes, comme nous l'avons déja dit; car qu'on eût à mesurer une figure telle que ABCDEFG, on pourroit prendre le côté AD pour un assemblage de deux, de trois, &c. lignes droites; substituant ensuite la droite FD à la courbe FED, on auroit la figure rectiligne ABCDFG, qui différeroit si peu de la figure mixte, que l'une pourroit être prise pour l'autre, sans erreur sensible.

PLAN. VIII. FIG. 1.

On opéreroit donc sur ces figures, en suivant les méthodes précédentes. Mais les Géometres ne s'accommoderoient guère de ces sortes d'opérations; ils n'en veulent que de rigoureuses. D'ailleurs, il y a tel cas où

la transformation d'une figure curviligne ou mixte, en une figure entiérement rectiligne, demanderoit qu'on partageât son contour en un si grand nombre de parties, qu'alors la méthode commune deviendroit impraticable; aussi ne seroit-on pas tenté de la suivre, si on avoit à mesurer un espace tel que Z (Fig. 7.), ou le cercle entier X (Fig. 3.); il faudroit prendre une autre voie pour trouver la mesure de ces sortes d'espaces. Ici nous ne nous attacherons qu'à ceux dont les contours renferment des arcs de cercle.

I.

SUPPOSONS d'abord qu'on ait l'aire du cercle X à mesurer. On observera qu'en lui inscrivant un polygone régulier BCDE, &c. plus ce polygone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or on a vû que l'aire d'un polygone (I. Part. FIG. 3.

Art. XXII.) eſt égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothème AH, que le polygone a de côtés ; ou, ce qui revient au même, que cette aire a pour meſure le produit du contour entier BCDE, &c. par la moitié de l'apothème. Donc, puiſqu'en pouſſant juſqu'à l'infini le nombre des côtés du polygone, ſon aire, ſon contour & ſon apothème, égaleront l'aire, le contour & le rayon du cercle, la meſure du cercle ſera le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.

La meſure du cercle, eſt le produit de ſa circonférence par la moitié de ſon rayon.

II.

Il ſuit de-là, que la ſuperficie d'un cercle BCD eſt égale à celle d'un triangle ABL, dont la hauteur ſeroit le rayon AB, & la baſe une droite BL égale à la circonférence.

Fig. 4.

L'aire du cercle eſt égale à un triangle dont la hauteur eſt le rayon, & la baſe une droite égale à la circonférence.

III.

Il ne s'agit donc que d'avoir le

rayon & la circonférence. A l'égard du rayon, il eſt aiſé de le meſurer ; il n'en eſt pas de même de la circonférence : cependant, pour avoir ſa meſure, on peut envelopper le cercle d'un fil ; ce qui, dans beaucoup d'occaſions, ſuffit pour la pratique.

Mais, juſqu'à préſent on n'a pu parvenir à meſurer géométriquement la circonférence du cercle, c'eſt-à-dire, à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent milliémes, à des millioniémes près, & même on en approche tant qu'on veut, ſans que pour cela, on puiſſe le déterminer rigoureuſement.

IV.

L'APPROXIMATION la plus ſimple qu'on ait trouvée, eſt celle qu'on tient d'Archiméde. Le diametre ayant 7 parties, ce que la circonférence contient de ces parties eſt en- Le diametre d'un cercle ayant 7

parties ; la circonférence en a près de 22.

tre 21 & 22 ; & l'on ſait qu'elle approche beaucoup plus de 22 que de 21.

V.

Les circonférences des cercles, ſont entr'elles, comme leurs rayons.

Au reſte, il eſt clair que ſi on ſavoit exactement le rapport d'une ſeule circonférence à ſon rayon, on ſauroit celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons ; ce rapport devant être le même dans tous les cercles. Cette propoſition paroît ſi ſimple, qu'elle n'a pas beſoin d'être démontrée, puiſqu'on ſent que quelles que fuſſent les opérations qu'on auroit faites pour meſurer une circonférence, en ſe ſervant des parties de ſon rayon, il faudroit qu'on fît les mêmes opérations, pour meſurer toute autre circonférence ; qu'ainſi on lui trouveroit le même nombre de parties de ſon rayon.

VI.

Il eſt évident que les cercles ont encore la propriété générale de tou-

tes les figures semblables (I. Part. Art. XLVII.) je veux dire, que leurs surfaces sont en même porportion que les quarrés de leurs côtés homologues; mais comme, pour appliquer cette proposition aux cercles on ne pourra prendre leurs côtés, il faudra se servir des rayons, alors on verra que les cercles auront leurs airs proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

Les aires des cercles sont proportionnelles aux quarrés de leurs rayons.

S'il ne paroissoit pas d'abord que cette proposition dût suivre de ce qui est dit dans l'article XLVII de la premiere Partie, & qu'on voulût en avoir une démonstration particuliere, on feroit attention qu'il reviendroit absolument au même, de comparer les aires de deux cercles BCD & EFG, ou celles des triangles ABL & AEM qui leur seroient égaux, (Article II.) en supposant que leurs bases BL & EM fussent les développemens des circonférences BCD & EFG, & que leurs hauteurs fussent les rayons

FIG. 4 & 5.

AB & AE. Or par l'article précédent, ces triangles feroient femblables ; donc leurs aires feroient en même proportion que les quarrés de leurs côtés homologues AB & AE, rayons des cercles BCD & EFG. Donc, &c.

VII.

Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypoténufe vaut les deux autres pris enfemble.

Les cercles, à caufe de leur fimilitude, auront auffi, de même que les figures femblables, cette propriété, que fi en prenant les trois côtés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon fera l'hypoténufe, égalera les deux autres pris enfemble.

Ainfi, on pourra toujours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, & cela fans prendre la peine de mefurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un baffin qui contienne autant d'eau que deux autres, la profondeur étant la même ; qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau

tuyau de fontaine, par lequel il s'écoule autant d'eau que par deux tuyaux donnés ; on y réussira sans peine, en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

VIII.

Si on avoit à mesurer la superficie d'une couronne V, figure enfermée entre deux cercles concentriques EFG & BCD, c'est-à-dire, entre deux cercles qui auroient un centre commun ; ce qui se présenteroit d'abord, ce seroit de mesurer séparément les superficies des deux cercles, & de retrancher la plus petite de la plus grande. Mais il est aisé de s'appercevoir que le problême peut se résoudre d'une maniere plus commode pour la pratique.

Fig. 6.

Une couronne est l'espace enfermé entre deux cercles concentriques.

Imaginons un triangle ABL qui ait le rayon AB pour hauteur, & dont la base soit une droite BL égale à la circonférence BCD. Si on mene par le

point E la droite EM parallele à BL, cette droite ſera égale à la circonférence EFG; car à cauſe de la ſimilitude des triangles AEM & ABL, il y aura même proportion entre AB & BL, qu'entre AE & EM. Or par la ſuppoſition, BL égalera la circonférence dont AB ſera le rayon : donc EM égalera auſſi la circonférence qui aura pour rayon la ligne AE, partie de AB. Il en ſeroit de même de toute autre ligne KI parallele à BL; elle ſeroit toujours égale à la circonférence dont AK ſeroit le rayon.

De l'égalité ſuppoſée entre la circonférence EFG & la droite EM, ſuit néceſſairement l'égalité du triangle AEM au cercle EFG; donc il faut que l'eſpace rectiligne EBLM ſoit égal à la couronne propoſée V. Or cet eſpace EBLM ſe peut aiſément changer en un rectangle EBPH, en coupant ML en deux parties égales MI & IL, & en menant à BL par le point I

la perpendiculaire HIP, qui donnera le triangle ajouté MHI, égal au triangle retranché PLI.

Donc si par le point I on mene à BL la parallele IK qui coupera EB en deux parties égales, la couronne proposée, égale à l'espace EBLM ou à EBPH, aura pour mesure le produit de EB par KI, circonférence dont AK sera le rayon.

Donc pour mesurer une couronne V, il faut multiplier sa largeur EB par la circonférence KOQ, dite moyenne entre les circonférences BCD & EFG, parce qu'elle surpasse la petite circonférence EFG, ou la droite EM, d'une quantité MH égale à PL, quantité dont elle est surpassée par la grande circonférence BCD, ou par la droite BL.

Pour mesurer une couronne, il faut multiplier la largeur par la circonférence moyenne.

IX.

Lorsqu'il s'agira de mesurer une figure Y, composée d'arcs de cercles

Fig. 2.

différens & de lignes droites, ou une figure Z uniquement composée d'arcs de cercles ; toute la difficulté se réduira à mesurer des segmens de cercle, c'est-à-dire, des espaces tels que ABCE* terminés par un arc ABC & par une corde AC. Car les figures entierement composées d'arcs de cercles, ou d'arcs & de lignes droites, peuvent toutes être considérées comme des figures rectilignes, augmentées ou diminuées de certains segmens.

FIG. 7. Le segment du cercle est un espace terminé par un arc & par sa corde.

* FIG. 8.

La mesure de toutes les figures circulaires se réduit à celle du segment.

X.

La mesure d'un segment quelconque ABCE est facile à trouver, lorsqu'on sait celle du cercle ; car, qu'on tire les lignes AT & CT au centre T de l'arc, on formera une figure ABCT appellée secteur, dont l'aire sera au cercle, comme l'arc ABC à la circonférence entiere, & qui par conséquent, aura pour mesure le produit de la moitié du rayon AT par l'arc ABC :

Le secteur est une portion de cercle, terminée par 2 rayons, & par l'arc qu'ils comprennent.

Sa mesure, & celle du segment.

or le ſecteur étant déterminé, il ne faudra plus qu'en retrancher le triangle ACT, pour avoir le ſegment ABCE.

XI.

COMME il arrive aſſez ſouvent que lorſqu'on ſe propoſe de meſurer une figure telle que Y, on n'a pas le centre de l'arc HIK, & que cependant, ſans ce centre, on ne ſauroit meſurer la figure, puiſque la méthode précédente exige la connoiſſance du rayon, il faut que nous cherchions le centre d'un arc de cercle quelconque. FIG. 2.

Trouver le centre d'un arc de cercle quelconque.

Soit ABC * l'arc de cercle propoſé, ſi on prend à volonté deux points A & B ſur cet arc, & que de ces points, comme centres, on décrive les quatre arcs *goi*, *foh*, *lpk* & *mpn*, les deux premiers, d'un rayon quelconque, & les deux autres, ou de ce même rayon, ou de tel autre rayon qu'on voudra; il eſt clair que le centre cherché de l'arc ABC, ſera ſur la ligne *op* qui join-

* FIG. 9.

dra les points d'interſection *o* & *p*.

Choiſiſſant enſuite un troiſiéme point C ſur l'arc ABC, & ſe ſervant de B & de C de la même maniere qu'on s'eſt ſervi de A & de B, on aura une droite *qr*, ſur laquelle devra encore ſe trouver le centre demandé. Donc ce centre ſera le point de rencontre T des lignes *op* & *qr*.

XII.

AINSI, quelqu'arrangement qu'on donne à trois points, pourvu qu'on ne les place pas en ligne droite, on pourra toujours les lier par un arc de cercle ; ou, ce qui revient au même, quelle que ſoit la proportion des côtés AC & BC d'un triangle ACB avec ſa baſe, on pourra toujours circonſcrire
FIG. 10. un cercle à ce triangle.

XIII.

LA méthode que nous venons de donner pour circonſcrire un cercle à un triangle, étant appliquée ſucceſſive-

ment à différens triangles ABC, AEB & AGB plus ou moins élevés à l'égard de leur baſe AB, on s'apperçoit qu'en paſſant d'un triangle ACB dont l'angle au ſommet eſt fort aigu, à d'autres triangles AEB & AGB dont l'angle au ſommet eſt plus ouvert, le centre du cercle circonſcrit s'approche continuellement de AB; & que ce centre paſſe enſuite au-deſſous de AB, lorſque l'angle au ſommet AGB a atteint une certaine ouverture. Or voyant paſſer ce centre au-deſſous de AB, après l'avoir vu au-deſſus, il doit venir dans l'eſprit, ce me ſemble, de chercher de quelle eſpece eſt le triangle AFB, lorſque le cercle circonſcrit a ſon centre ſur AB même. FIG. 10 & 11. FIG. 12.

Pour connoître ce triangle AFB, on commencera par remarquer que dans ce cas particulier, la portion du cercle circonſcrite au triangle doit être exactement un demi-cercle : en effet le centre du cercle devant ſe trouver

ſur la baſe AB, dont les deux extrémités ſont, par la ſuppoſition, dans la circonférence, le centre M ne pourra pas manquer d'être ſitué précisément au milieu de AB, de ſorte que AB ſera néceſſairement un diametre.

On verra enſuite que de quelque point F du demi-cercle qu'on tire les lignes FA & FB, l'angle AFB ſera droit. Car menant FM, les deux triangles AFM & MFB ſeront iſoſceles; donc les deux angles AFM & MFB ſeront reſpectivement égaux aux angles FAM & FBM; ou, ce qui revient au même, l'angle total AFB égalera la ſomme des deux angles FAM & FBM; mais les trois angles AFB, FAM & FBM pris enſemble, valent deux droits. Donc l'angle AFB ſera droit.

Si d'un point quelconque de la circonférence d'un demi-cercle, on tire deux droites aux extrémités du diametre, on aura un angle droit.

Ainſi, ſi on décrit ſur la baſe AB un triangle rectangle quelconque, ce triangle aura la propriété demandée, d'être inſcrit dans un cercle dont le centre eſt ſur la baſe.

XIV.

CETTE propriété du cercle, que l'angle qui a ſon ſommet dans la demi-circonférence & qui eſt appuyé ſur le diametre, eſt toujours droit, porte à chercher ſi les autres parties du cercle n'auroient pas quelque propriété analogue ; ſi, par exemple, les angles ACB, AEB & AFB, pris dans un ſegment ACEFB, ne ſeroient pas tous égaux entr'eux, ainſi que le ſont ceux du demi-cercle. PLAN. IX. FIG. 1.

Pour nous en aſſurer, nous commencerons par chercher la valeur d'un de ces angles, & nous verrons enſuite ſi les autres ont la même valeur. Nous prendrons, par exemple, l'angle AEB dont le ſommet E eſt placé au milieu de l'arc AEB. Comme la ligne EDG qui paſſe par le centre D, coupe cet angle en deux parties égales, il ſuffira de meſurer l'angle AEG ſa moitié, ou, ce qui revient au même, il ſuffira de FIG. 2.

ſavoir quelle partie l'angle AEG eſt d'un angle déja meſuré, tel que ADG; je dis que l'angle ADG eſt déja meſuré, parce que nous ſavons que l'arc AG eſt ſa meſure. (I. Part. Art. LII.)

Si on fait attention que le triangle AED eſt iſoſcele, on verra facilement que l'angle AEG eſt la moitié de l'angle ADG; car les angles AED & EAD (I. Part. Art. XXXI.) ſont égaux : mais (I. Part. Art. LXVIII.) ces deux angles, pris enſemble, valent l'angle extérieur ADG. Donc l'angle AED ou AEG, eſt la moitié de l'angle ADG.

Par la même raiſon, l'angle DEB ſera la moitié de l'angle GDB. Donc l'angle total AEB égalera la moitié de l'angle ADB. Donc ſa meſure ſera la moitié de l'arc AGB.

X V.

L'ANGLE AEB étant meſuré, pour ſavoir s'il eſt égal à chacun des

autres angles qui ont leur ſommet dans le même ſegment, il faut examiner ſi un de ces angles pris à volonté, AFB, par exemple, eſt auſſi la moitié de l'angle au centre ADB. On s'en aſſurera facilement, en tirant la droite FDG par le centre. Car alors on verra que l'angle AFB ſera composé de deux autres AFD & DFB, qui ſeront, par l'article précédent, les moitiés des angles ADG & GDB, d'où l'on conclura que l'angle total AFB ſera la moitié de l'angle ADB; & en appliquant le même raiſonnement à tous les angles ACB, AEB & AFB qui ont leurs ſommets à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc AGB, on pourra conclure que ces angles ſont égaux entr'eux, ainſi que nous l'avions ſoupçonné dans l'article précédent.

FIG. 3.

Tous les angles dont le ſommet eſt à la circonférence, & qui s'appuient ſur le même arc, ſont égaux; & ont pour commune meſure, la moitié de l'arc ſur lequel ils s'appuient.

FIG. 1.

XVI.

PARMI les différens angles qui ont leur ſommet dans l'arc ACEFB, il y

en a qui pourroient d'abord ne pas paroître compris dans la démonſtration précédente ; ce ſont des angles AFB, tels que la droite FDG tirée par le centre paſſe hors de l'angle ADB. Cependant, en remarquant toujours que l'angle GFA eſt la moitié de l'angle GDA, & l'angle DFB la moitié de l'angle GDB, on verra que l'angle AFB, excès de l'angle DFB ſur l'angle DFA, ſera, dans ce cas, la moitié de l'angle ADB, excès de l'angle GDB ſur GDA.

FIG. 4.

XVII.

PAR les figures dont nous nous ſommes ſervis, il ſembleroit auſſi que la démonſtration précédente ne conviendroit qu'aux ſegmens plus grands qu'un demi-cercle ; mais il eſt aiſé de voir qu'un angle quelconque, tel que AFB, qui auroit ſon ſommet dans un ſegment plus petit qu'un demi-cercle, ſeroit toujours composé de deux autres

FIG. 5.

DFB & DFA, moitiés des angles BDG & ADG; & par conſéquent, que cet angle AFB auroit pour meſure la moitié des deux arcs BG & AG, c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc AGB.

XVIII.

APRÈS avoir vû que dans un même ſegment, les angles AEB, AFB & AHB ſuppoſés à la circonférence ſont tous égaux, on eſt tenté de chercher ce que devient l'angle AQB, lorſque ſon ſommet ſe confond avec le point B, extrémité de la baſe AB. Cet angle s'évanouiroit-il alors? Mais il ne paroît pas poſſible que ſans s'être reſſerré par degrés, il vienne tout-à-coup à s'anéantir. On ne voit pas quel ſeroit le point au-delà duquel cet angle ceſſeroit d'exiſter; comment donc parviendra-t-on à en trouver la meſure? c'eſt une difficulté qu'on ne peut réſoudre, ſans recourir à la Géométrie de l'infini, dont tous les hommes ont FIG. 6.

au moins une idée imparfaite, qu'il ne s'agit que de développer.

Obſervons d'abord, que quand le point E s'approche de B, en devenant F, H, Q, &c. la droite EB s'accourcit continuellement, & que l'angle EBA qu'elle fait avec la droite AB, s'ouvre de plus en plus. Mais quelque courte que devienne la ligne QB, l'angle QBA n'en ſera pas moins un angle, puiſque pour le rendre ſenſible, il ne faudroit que prolonger la ligne accourcie QB vers R. En doit-il être de même, lorſque la ligne QB, à force de diminuer, s'eſt réduite enfin à zéro? qu'eſt devenue alors ſa poſition? qu'eſt devenu ſon prolongement?

Il eſt évident qu'il n'eſt autre choſe que la droite BS, qui touche le cercle en un ſeul point B, ſans le rencontrer en aucun autre endroit, & que pour cette raiſon, on appelle tangente.

La tangente au cercle, eſt la ligne

De plus, il eſt clair que pendant que la ligne EB diminue continuellement

jusqu'à s'anéantir à la fin, la droite AE, qui devient successivement AF, AH & AQ, &c. s'approche toujours de AB, & qu'elle se confond enfin avec elle. Donc l'angle à la circonférence AEB, après être devenu AFB, AHB & AQB, devient en dernier lieu l'angle ABS, fait par la corde AB & par la tangente BS; & cet angle, qu'on appelle angle au segment, doit toujours conserver la propriété d'avoir pour mesure la moitié de l'arc AGB.

qui ne le touche qu'en un point.

L'angle au segment est celui qui est fait par la corde & par la tangente.

Sa mesure est la moitié de l'arc du segment.

Quoique cette démonstration soit peut-être un peu abstraite pour les Commençans, j'ai cru à propos de la donner, parce qu'il sera très-utile à ceux qui voudront pousser leurs études jusqu'à la Géométrie de l'infini, de s'être accoutumés de bonne heure à de pareilles considérations.

Si cependant les Commençans trouvoient cette démonstration au-dessus de leurs forces, il est aisé de les mettre à portée d'en découvrir une autre, en

leur expliquant la principale propriété des tangentes.

XIX.

Fig. 7.

La tangente est perpendiculaire au diametre qui passe par le point d'attouchement.

Cette propriété est qu'une tangente au cercle dans un point quelconque B, doit être perpendiculaire au diametre IDB qui passe par ce point. Car comme la courbure du cercle est si uniforme qu'un diametre quelconque IDB le partage en deux demi-cercles IAB & IOB, égaux & également situés à l'égard de ce diametre, il faut que les deux parties BS & BH de la tangente commune à ces deux demi-cercles, soient aussi également situées à l'égard de ce diametre : or cela ne sauroit être sans que IDB ne soit perpendiculaire à la tangente HBS.

XX.

De-la on verra facilement pourquoi l'angle au segment ABS, a pour mesure la moitié de l'arc AGB.

Car

Car l'angle ADB joint avec les deux angles égaux DAB & DBA, fait (I. Part. Art. LXIV.) deux angles droits. Donc la moitié de l'angle ADB, jointe avec l'angle DBA, fait un droit. Mais l'angle DBA, ajouté avec l'angle ABS, donne auſſi un droit. Donc l'angle ABS eſt égal à la moitié de l'angle ADB. Donc la meſure de ABS ſera la moitié de l'arc AGB.

XXI.

La ſeconde démonſtration que nous venons de donner de cette propriété du cercle, que l'angle ABS a pour meſure la moitié de l'arc AGB, fournit la ſolution du problême ſuivant.

Décrire ſur AB un ſegment de cercle capable de l'angle formé L, c'eſt-à-dire, un ſegment AFB, dans lequel tous les angles AFB à la circonférence ſoient égaux à l'angle L.

FIG. 8 & 9.

Ce que c'eſt qu'un ſegment capable d'un angle donné.

Maniere de faire un ſegment capable d'un angle donné.

Pour réſoudre ce problême, il faudra faire en A & en B les angles BAS

& ABS, chacun égal à l'angle L; & élever ſur AS & ſur BS les deux perpendiculaires AD & BD; leur rencontre D ſera le centre de l'arc cherché AFB.

Car par l'article XIX, les droites BS & AS ſeront les tangentes du cercle dont le centre eſt D & le rayon AD, ou BD, puiſque BD ou AD ſont perpendiculaires à BS & à AS. De plus par l'article précédent, l'angle ABS a pour meſure la moitié de AGB, & par l'article XV les angles tels que AFB, ſont auſſi meſurés par la moitié de AGB. Donc ces angles AFB ſeront égaux à ABS; c'eſt-à-dire, à l'angle L, ainſi qu'on le demandoit.

XXII.

La découverte des propriétés des ſegmens de cercle, que nous venons d'expliquer, eſt dûe vraiſemblablement à la ſimple curioſité des Géometres; mais il en a été de cette découver-

te, comme il en eſt tous les jours de beaucoup d'autres ; ce qu'on ne croyoit pas d'abord utile, le devient par la ſuite. On a fait dans la pratique des applications fort heureuſes des propriétés du cercle, que nous venons de démontrer. Je ne donnerai qu'une ſeule de ces applications ; on la trouvera dans la ſolution du problême ſuivant, qui eſt ſouvent néceſſaire dans la Géographie.

A, B & C ſont trois lieux dont on connoît les diſtances reſpectives AB, BC & AC ; il s'agit de ſavoir à quelle diſtance de ces lieux eſt un point D, d'où l'on peut les voir tous les trois, mais d'où l'on ne peut ſortir pour opérer ſur le terrein. FIG. 10. Trouver la diſtance d'un lieu à trois autres, dont les poſitions ſont connues.

On commencera par tracer ſur le papier trois points *a*, *b* & *c*, qui ſoient ſitués entr'eux de la même maniere que les trois points A, B & C ; c'eſt-à-dire en langage géométrique, qu'on fera le triangle *abc* ſemblable au triangle ABC. FIG. 10 & 11.

Ayant obſervé enſuite avec le demi-cercle la grandeur des angles ADB & BDC, on fera ſur *ab*, le ſegment de cercle *adb* capable de l'angle ADB; & ſur la droite *bc*, le ſegment de cercle *bdc* capable de l'angle BDC : la rencontre *d* de ces deux ſegmens déſignera, ſur le papier, la poſition du lieu D; c'eſt-à-dire, que les lignes *da*, *db* & *dc* feront en même proportion à l'égard de *ab*, *bc* & *ac*, que les diſtances cherchées DA, DB & DC, à l'égard des diſtances données AB, BC & AC: ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, après ce qu'on a vû ſur les figures ſemblables.

XXIII.

On pourroit facilement faire voir que la pratique a tiré bien d'autres ſecours des propriétés du cercle, qu'on vient de démontrer; mais il eſt plus à propos de paſſer à d'autres propriétés du cercle, qui ont été tirées des pré-

cédentes, & qui ont eu auſſi leur utilité.

Pour procéder par ordre à la découverte de ces propriétés, nous commencerons par remarquer que deux angles quelconques EDC & EBC, qui s'appuient ſur le même arc EC, étant égaux, il s'enſuit que les triangles DAE & BAC ont les angles égaux; c'eſt-à-dire, (I. Part. Art. XXXIX.) que ces triangles ſont ſemblables. PLAN. X. FIG. 1.

Car par la même raiſon que l'angle EDC eſt égal à l'angle EBC, l'angle DEB ſera égal à l'angle DCB; & quant aux angles DAE & BAC, ils ſeront viſiblement égaux; ſoit parce qu'ils ſont faits de mêmes lignes; ſoit parce que deux triangles, dont l'un a deux angles reſpectivement égaux à deux angles de l'autre, ont auſſi néceſſairement le troiſiéme angle égal. (I. Part. Article XXXVIII.)

Pour reconnoître plus facilement enſuite dans les triangles ADE & ABC, les propriétés générales des triangles

ſemblables, nous appliquerons le triangle DAE ſur le triangle BAC, en poſant AD ſur AB, & AE ſur AC, afin que DE ſoit parallele à BC. Nous nous rappellerons alors,

FIG. 1 & 2.

1°. Que ſi deux triangles ADE & ABC ſont ſemblables, les quatre côtés AC, AE, AB & AD ſont en proportion. (I. Part. Art. XXXIX.)

2°. Que dans toute proportion, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens (II. Part. Art. VIII.) & nous conclurons de-là, que le rectangle ou le produit de AC par AD, eſt égal au rectangle de AE par AB; propriété du cercle, très-remarquable, & qu'on peut énoncer ainſi : ſi dans un cercle on tire à volonté deux droites qui ſe coupent, le produit des deux parties de la premiere eſt égal au produit des deux parties de la ſeconde.

Deux cordes ſe coupant dans un cercle, le rectangle des parties de l'une eſt égal au rectangle des parties de l'autre.

XXIV.

FIG. 3.

SI les deux droites BE & DC ſe

coupoient perpendiculairement, & que l'une de ces deux droites fût un diametre DC, il eſt clair que les deux parties AB & AE de l'autre droite BE, ſeroient égales entr'elles; de ſorte que la propriété précédente s'énonceroit ainſi dans ce cas particulier. Si ſur le diametre DC d'un cercle, on éleve une perpendiculaire quelconque AB, le quarré de cette perpendiculaire ſera égal au rectangle de AD par AC.

Le quarré d'une perpendiculaire quelconque au diametre d'un cercle, eſt égal au rectangle des deux parties du diametre.

XXV.

Il arrive ſouvent qu'on a beſoin de changer un rectangle en un quarré, l'article précédent en fournit un moyen facile : ſoit ACFE le rectangle propoſé, on prolongera AC en D, de ſorte que AD ſoit égal à AE, & l'on décrira le demi-cercle DBC, dont le diametre ſoit DC. Prolongeant enſuite le côté EA juſqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle, on aura AB pour le côté

Changer un rectangle en un quarré.

FIG. 4.

du quarré cherché ABGH, égal au rectangle donné ACFE.

XXVI.

Ce que c'est qu'une moyenne porportionnelle entre deux lignes droites.

On propose souvent un problême qui n'est que celui que nous venons de résoudre, présenté autrement. C'est de trouver une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données; on entend alors par la moyenne proportionnelle, la ligne qui est aussi grande par rapport à la plus petite des deux lignes données, qu'elle est petite par rapport à la plus grande; c'est-à-dire, que si AB, par exemple, est moyenne proportionnelle entre AD & AC, on pourra dire que AD est à AB, comme AB est à AC. Or il est bien aisé de voir que ce problême est le même que le précédent, puisque (II. Part. Art. VIII.) le produit de AD par AC, c'est-à-dire le rectangle de ces deux lignes, sera égal au produit

de AB par AB, c'eſt-à-dire, au quarré de AB.

Donc lorſqu'on voudra trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données, on changera le rectangle de ces deux lignes en un quarré dont le côté ſera la ligne cherchée. Maniere de la trouver.

XXVII.

On peut encore trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes, d'une autre maniere qui ſuit de la propriété du cercle expliquée dans l'article XIII. Suppoſons que AC ſoit la plus grande des deux lignes données, & AD la plus petite; on élevera DB perpendiculairement ſur AC, & le point B, où elle rencontrera le demi-cercle ABC tracé ſur le diametre AC, donnera la ligne AB, moyenne proportionnelle entre AD & AC. Car en tirant BC, il eſt clair que le triangle ABC ſera rectangle en B. Donc (I. Part. Art. XXXVIII.) ce triangle ſera

Autre maniere.

FIG. 5.

ſemblable au triangle ABD, puiſque ces deux triangles ont d'ailleurs l'angle A de commun; mais ſi les triangles ADB & ABC ſont ſemblables, ils ont leurs côtés proportionnels. Donc AD eſt à AB, comme AB à AC. Donc AB eſt moyenne proportionnelle entre AD & AC.

XXVIII.

Changer une figure rectiligne en un quarré.

Si on vouloit changer une figure rectiligne quelconque en un quarré, il ne faudroit, pour ramener ce problême à l'article XXV, que faire de cette figure un rectangle; ce qui ſeroit fort facile, à cauſe que les figures rectilignes ne ſont que des aſſemblages de triangles, que chaque triangle eſt la moitié d'un rectangle qui a même baſe & même hauteur, & que tous les rectangles provenus des triangles, ne feront plus qu'un ſeul rectangle, en leur donnant à tous une hauteur commune. (II. Part. Art. VI.)

XXIX.

Les figures dont les contours renfermeront des arcs de cercle, pourront aussi être changées en quarrés, lorsqu'on aura mesuré par pratique la longueur des arcs dont elles seront composées; car on pourra alors changer ces figures, ainsi que les rectilignes, en rectangles; on aura recours pour cela aux articles IX & X où l'on a appris à mesurer toutes sortes de figures circulaires.

XXX.

Faire un quarré qui soit à un autre en raison donnée.

On tire encore de la propriété du cercle, expliquée dans l'art. XXIV, une méthode bien facile pour faire un quarré qui soit à un quarré donné, en raison donnée; problême que nous avions promis dans l'article XXII de la seconde Partie.

Supposons, par exemple, qu'on se propose de faire un quarré qui soit au

Fig. 6. quarré ABCD, comme la ligne M à la ligne N. On divisera (I. Part. Art. XLI.) le côté CB au point E, de maniere que CB soit à BE comme la ligne N à la ligne M; menant ensuite la parallele EF à AB, le rectangle ABEF aura la même superficie que le quarré demandé; donc il ne s'agira plus que de changer ce rectangle en un quarré.

XXXI.

Fig. 7 & 8.

Faire un polygone qui soit en raison donnée avec un polygone semblable.

Si on veut faire un polygone HIKLM, qui soit à un polygone semblable ABCDE, dans la raison de la ligne X à la ligne Y, on commencera par faire sur le côté AB du polygone donné ABCDE, le quarré ABGF; ensuite on cherchera un autre quarré HIOQ, qui soit au quarré ABGF, comme la ligne X à la ligne Y. Et alors décrivant sur le côté HI de ce quarré un polygone HIKLM, semblable au premier ABCDE, ce nouveau poly-

gone ſera celui qu'on demande. La raiſon en eſt bien facile à trouver, ſi on ſe rappelle (I. Part. Art. XLVIII.) que les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

XXXII.

Faire un cercle, qui ſoit à un autre cercle en raiſon donnée.

Si on vouloit faire un cercle dont l'aire fût à celle d'un cercle donné, comme X à Y, il faudroit conſtruire un quarré qui fût au quarré du rayon de ce premier cercle, comme X à Y; & le côté de ce nouveau quarré ſeroit le rayon du cercle demandé.

XXXIII.

Voici encore une propriété du cercle tirée de celle qui a fourni les problêmes précédens.

Fig. 9.

Si d'un point pris hors d'un cercle, on tire deux

Si d'un point A, pris hors d'un cercle, on mene à volonté deux droites ABC & ADE, qui coupent chacune la circonférence en deux points,

lignes qui le traversent, les rectangles de ces deux droites par leurs parties extérieures seront égaux.

& qu'on mene les droites CD & BE, les triangles ACD & AEB seront semblables, puisque l'angle A est commun aux deux triangles, & qu'ils ont d'ailleurs les angles à la circonférence C & E, égaux. Or de ce que les triangles ACD & AEB sont semblables, il s'ensuit que les quatre lignes AB, AD, AE & AC sont en proportion, & par conséquent, que le rectangle des deux droites AB & AC est égal au rectangle des deux droites AD & AE; ce qui peut s'exprimer ainsi : si d'un point quelconque A, pris hors d'un cercle, on tire à volonté deux lignes droites AC & AE qui traversent ce cercle, le rectangle de la droite AC par sa partie extérieure AB, sera égal au rectangle de la droite AE par sa partie extérieure AD.

XXXIV.

LORSQUE la droite qui part du point A, au lieu de couper le cercle ne fait simplement que le toucher,

ainſi que AF, la propriété précédente ſe change en celle-ci : le quarré d'une tangente AF, eſt égal au rectangle produit par la ſécante quelconque AE, & par ſa partie extérieure AD. Ce qui eſt bien aiſé à démontrer. Car regardant la droite AF qui touche le cercle, comme une ligne qui le couperoit en deux points infiniment proches, les lignes AB & AC ne ſont alors qu'une même ligne AF, & au lieu du rectangle de AB par AC, on a le quarré de AF.

Le quarré de la tangente eſt égal au rectangle de la ſécante par ſa partie extérieure.

XXXV.

La propoſition démontrée dans l'article précédent, en nous apprenant la valeur du quarré de la tangente AF, ne nous apprend pas à tirer cette tangente du point donné A. Pour la tirer, on ſe reſſouviendra, (Art. XIX.) que le rayon FG eſt perpendiculaire à la tangente FA. Ainſi il ne s'agit que de trouver ſur le cercle

FIG. 10.

D'un point donné hors d'un cercle, lui mener une tangente.

donné, le point F, tel que l'angle AFG ſoit droit. Donc, en décrivant ſur AG un demi-cercle, le point où il coupera le cercle FKO ſera (Article XIII.) le point cherché F.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

QUATRIÉME PARTIE.

De la maniere de meſurer les ſolides, & leurs ſurfaces.

LES principes que nous avons établis dans les trois premieres Parties de cet Ouvrage, pourroient nous ſuffire pour réſoudre des problêmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous propoſer ; mais il eſt plus dans l'ordre que nous avons

ſuivi précédemment, de paſſer maintenant à la meſure des ſolides, c'eſt-à-dire, des étendues terminées qui ont à la fois trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur.

Cette recherche a été, ſans doute, un des premiers objets qui ait pu fixer l'attention des Géometres. On aura voulu ſavoir, par exemple, combien il y avoit de pierres de taille dans un mur dont la hauteur AD, la largeur AB, & la profondeur ou épaiſſeur BG étoient connues. On ſe ſera propoſé de déterminer la quantité d'eau que contenoit un foſſé, ou un réſervoir ABCD; on aura voulu trouver la ſolidité d'une tour, d'un obéliſque, d'une maiſon, d'un clocher, &c.

PLAN. XI. FIG. 1.

FIG. 2.

Pour traiter les figures qui ont les trois dimenſions, de la même maniere que nous avons traité celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les ſolides qui ſont terminés par des plans.

Nous n'aurons pas beſoin de parler de la maniere de meſurer les ſurfaces de ces corps, elles ne peuvent être que des aſſemblages de figures rectilignes; & par conſéquent, leur meſure dépend de ce qui a été dit dans la premiere Partie.

I.

POUR meſurer la ſolidité des corps, il eſt naturel de les rapporter tous au ſolide le plus ſimple, ainſi que pour meſurer les ſurfaces on les a toutes rapportées au quarré. Or le ſolide le plus ſimple, c'eſt le cube, qui en effet eſt en ſolide, ce que le quarré eſt en ſuperficie; c'eſt-à-dire, que c'eſt un eſpace tel que *abcdefgh*, dont la longueur, la largeur & la profondeur ſont égales, ou ce qui revient au même, c'eſt une figure terminée par ſix faces égales qui ſont des quarrés.

Le cube eſt une figure ſolide terminée par ſix quarrés. C'eſt la meſure commune des ſolides.

FIG. 3.

On appelle côté du cube, le côté des quarrés qui lui ſervent de faces.

Par un pied cube, on entend un cube dont le côté eſt d'un pied ; de même un pouce cube eſt un cube dont le côté eſt d'un pouce, &c.

I I.

Fig. 1.

Le parallelipipéde eſt un ſolide terminé par ſix rectangles.

Les plans paralleles ſont ceux qui conſervent toujours entre eux la même diſtance.

Les ſolides qu'on a le plus communément à meſurer, ſont des figures ABCDEFGH terminées par ſix faces rectangles ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH & ABGH. On appelle ces ſolides des parallelipipédes, parce que leurs faces oppoſées conſervant dans tous leurs points la même diſtance l'une de l'autre, ſont dites paralleles, de même que les lignes ont auſſi été nommées paralleles, lorſqu'elles conſervoient par-tout la même diſtance.

I I I.

Or ſi on ſe propoſe de meſurer des ſolides de cette eſpece, l'analogie de ce problême avec celui où il s'eſt agi de la

mesure des surfaces rectangles, donnera un moyen facile de le résoudre.

On commencera par mesurer séparément la longueur AD, la largeur AB & la profondeur BG de la figure proposée, soit en pieds, soit en pouces, &c. on multipliera ensuite l'un par l'autre les trois nombres qu'on aura trouvés; & le produit qui viendra de cette multiplication, exprimera combien le parallelipipéde contiendra de pieds cubes, ou de pouces cubes, &c. suivant que les dimensions auront été mesurées en pieds ou en pouces, &c. Pour mieux montrer comment se fait cette opération, nous allons en donner un exemple. Mesure du parallelipipéde.

Supposons que la longueur AD soit de 6 pieds, la largeur AB de 5, & la profondeur BG de 4, le rectangle ABCD (I. Part. Art. XI.) aura 6 fois 5 ou 30 pieds quarrés. Si on imagine ensuite que les lignes BG, CF, DE & AH, qui mesurent toutes également la

profondeur du ſolide, ſoient partagées chacune en quatre parties égales, & que par les points de diviſion correſpondans, on faſſe paſſer autant de plans paralleles les uns aux autres; ces plans diviſeront le parallelipipéde propoſé, en quatre autres parallelipipédes, qui auront chacun un pied de profondeur, & qui ſeront tous égaux & ſemblables. Or l'inſpection ſeule de la figure fait voir que le premier de ces parallelipipédes contient 30 pieds cubes, puiſque ſa face extérieure ABCD contient 30 pieds quarrés. Donc le ſolide total ABCDEFGH contiendra 4 fois 30 ou 120 pieds cubes.

IV.

Nous ne nous arrêterons point à expliquer les différens moyens qu'on peut employer dans la pratique pour conſtruire des parallelipipédes, parce que ces moyens ſont, pour la plûpart, ſi aiſés à trouver, qu'il n'y a perſonne qui ne les puiſſe imaginer. Mais nous

donnerons la formation ſuivante du parallelipipéde, qui eſt plus utile à conſidérer que tous les autres.

Si on conçoit qu'un quarré ou rectangle ABGH ſe meuve parallelement à lui-même, en ſorte que ſes quatre angles A, B, G & H parcourent chacun une des quatre lignes AD, BC, GF & HE, perpendiculaires au plan du rectangle ABGH; ce rectangle par le mouvement que nous venons de décrire, formera le parallelipipéde ABCDEFGH.

Les parallelipipédes ſont produits par un rectangle qui ſe meut parallelement à lui-même.

V.

Il eſt preſqu'inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne penche d'aucun côté ſur ce plan; & de même, qu'un plan qui ne penche pas plus d'un côté que d'un autre ſur un ſecond plan, eſt dit perpendiculaire à ce ſecond plan. Ces deux définitions ſont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

La ligne perpendiculaire à un plan, eſt celle qui ne penche d'aucun côté ſur ce plan.

Il en eſt de même du plan perpendiculaire à un autre plan.

V I.

Fig. 4.

La ligne qui est perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

Or il suit de-là, que la ligne AB qui est perpendiculaire au plan X, doit être perpendiculaire à toutes les lignes AC, AD, AE, &c. qui partent du pied A de cette ligne, & qui sont dans ce plan. Car il est évident que si elle penchoit sur une de ces lignes, elle seroit inclinée vers quelque côté du plan. Donc elle ne lui seroit pas perpendiculaire.

V I I.

Pour se représenter d'une façon bien sensible, comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son extrêmité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief, de la maniere suivante.

Fig. 5.

On construira de quelque matiere unie & facile à plier, comme du carton, un rectangle FGDE, partagé en deux parties égales par la droite AB

perpendiculaire aux côtés ED & FG; on pliera enſuite ce rectangle, en ſorte que le pli ſoit le long de la ligne AB, & on le portera tout plié ſur le plan X. Il eſt évident que, quelle que ſoit l'ouverture qu'on donne aux deux parties FBAE & GBAD du rectangle plié EADGBF, ces deux parties reſteront toujours appliquées ſur le plan X, ſans que la ligne AB change de poſition par rapport à ce plan : cette droite AB ſera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de ſon pied & qui ſeront dans le plan X, puiſque les côtés AE & AD du rectangle plié, s'appliqueront ſucceſſivement ſur chacune de ces lignes, par le mouvement que nous venons de décrire. FIG. 6.

VIII.

ON tire de la conſtruction précédente, une pratique bien commode pour élever d'un point donné ſur un plan, une ligne perpendiculaire à ce

plan, ou pour abaiſſer d'un point pris hors d'un plan, une ligne qui ſoit perpendiculaire à ce plan. Car que le point propoſé ſoit dans le plan, en A par exemple, ou qu'il ſoit hors du plan, comme en H, on pourra toujours faire avancer le rectangle EFBGDA ſur le plan X, juſqu'à ce que le pli AB touche le point donné; & AB deviendra, dans les deux cas, la perpendiculaire demandée.

Fig. 7.

Pratique ſimple pour élever, ou pour abaiſſer des lignes perpendiculaires à des plans.

IX.

Il ſuit auſſi de-là, qu'une ligne AB ſera perpendiculaire à un plan X, toutes les fois qu'elle ſera perpendiculaire à deux lignes AE & AD de ce plan. Car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliqueroit ſur AE, & l'autre ſur AD. Or ce pli ne pourroit manquer d'être perpendiculaire au plan X.

Une ligne ſera perpendiculaire à un plan, ſi elle eſt perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

X.

Si on veut élever ſur une ligne

quelconque KL, un plan perpendiculaire au plan X dans lequel eſt cette ligne, on pourra ſe ſervir encore pour cela, du rectangle plié GBFEAD. Car il ne faudra que poſer ſur la ligne KL le côté AD d'une des parties ADGB de ce rectangle plié; & le plan de cette partie ADGB, ſera celui qu'on demande.

Maniere d'élever un plan perpendiculaire à un autre.

X I.

On verra facilement que ſi on poſoit un troiſiéme plan Y ſur les deux côtés EB & BG du même rectangle plié, ce plan Y ſeroit encore perpendiculaire à la ligne AB, & par conſéquent, parallele au plan X.

Fig. 8.

Donc ſi à un plan X on éleve trois perpendiculaires EF, AB & DG d'égale longueur, & qui ne ſoient pas poſées en ligne droite, le plan Y qui paſſera par les trois points F, B & G, ſera néceſſairement parallele au plan X.

Mener un plan parallele à un autre.

X I I.

Lorsque deux plans ne ſeront

pas paralleles, il ſera facile de connoître l'angle qu'ils feront entr'eux, en ſe ſervant encore de notre rectangle plié. Pour en venir à bout, nous appliquerons l'une des deux parties ABGD de ce rectangle, ſur le plan X; il eſt évident que l'angle EAD, ou ſon égal FBG, meſurera l'inclinaiſon du plan EABF ſur le plan DABG. Or ſi on remarque que AB eſt la commune ſection de ces plans, & que EA & AD ſont chacune perpendiculaires à AB, on en tirera ſans peine la regle ſuivante.

FIG. 9.

Meſurer l'inclinaiſon d'un plan ſur un autre.

Deux plans qui ne ſont pas paralleles étant donnés, il faut commencer par trouver la ligne droite qui eſt leur commune ſection; enſuite, d'un point quelconque de cette ligne, on lui menera deux perpendiculaires qui ſoient chacune dans un de ces plans; & l'angle que feront entr'elles ces deux perpendiculaires, meſurera l'angle que les deux plans donnés font entr'eux.

XIII.

COMME on s'apperçoit sans peine, que pendant le mouvement de ABFE autour du pli AB, la droite AE dont l'extrémité E décrit un arc de cercle ED, ne sort jamais d'un plan EAHD perpendiculaire au plan X, & que l'inclinaison de la droite EA sur le plan X n'est autre chose que l'angle EAD, on découvre encore très-facilement que l'inclinaison d'une droite quelconque EA sur le plan X, est mesurée par l'angle EAH fait entre cette ligne & la ligne AD, qui passe par A & par le point H du plan X, où tombe la perpendiculaire EH abaissée sur ce plan, d'un point quelconque E de la droite AE.

Mesurer l'inclinaison d'une ligne sur un plan.

XIV.

L'INSPECTION seule de la figure dont on vient de se servir dans l'article précédent, fournit un nouveau

moyen d'abaiſſer d'un point E, hors d'un plan X, une ligne EH perpendiculaire à ce plan.

Nouvelle maniere d'abaiſſer une ligne perpendiculaire à un plan donné.

Ayant tiré une ligne quelconque BAS dans le plan X, on abaiſſera du point donné E la perpendiculaire EA à cette ligne. Cela fait, du point A où cette perpendiculaire tombe, on élevera dans le plan X la perpendiculaire AD à AB; & abaiſſant enſuite du point donné E à la droite AD la perpendiculaire EH, cette ligne ſera la perpendiculaire au plan X.

XV.

Seconde maniere d'élever une ligne perpendiculaire à un plan donné.

On tire de-là une ſeconde façon d'élever à un plan X, une perpendiculaire MN, d'un point M donné ſur ce plan.

Ayant abaiſſé d'un point quelconque E pris hors du plan X, la perpendiculaire EH à ce plan, on menera par le point donné M la droite MN

qui ſoit parallele à HE, & elle ſera la perpendiculaire au plan X.

XVI.

APRÈS le parallelipipéde, le ſolide le plus ſimple eſt le priſme droit. C'eſt une figure ABÇDEFGHIKLM, dont les deux baſes oppoſées & paralleles ſont deux polygones égaux; & tellement placés, que les côtés GF, FE, &c. de l'un, ſoient paralleles aux côtés BC, CD, &c. de l'autre; & dont les autres faces ſont des rectangles ABGH, BGFC, &c.

FIG. 10.

Le priſme droit eſt une figure ſolide, dont les deux baſes oppoſées ſont deux polygones égaux : & les autres faces, des rectangles.

XVII.

LES Géometres ſuppoſent ces figures formées, ainſi que les parallelipipédes, par une baſe ABCDLM qui ſe meut parallelement à elle-même, de façon que ſes angles A, B, &c. ſuivent des lignes perpendiculaires au plan de la baſe.

Formation des priſmes droits.

XVIII.

Pour distinguer les différentes especes des prismes droits, on ajoute le nom du polygone qui leur sert de base. Le prisme exagonal, par exemple, est celui dont la base est un exagone.

XIX.

Deux prismes qui ont des bases égales, sont en même raison que leurs hauteurs.

Pour trouver la maniere de mesurer toutes sortes de prismes droits, on observera d'abord, que de deux prismes droits dont les bases seroient égales, celui qui auroit une plus grande hauteur, seroit plus grand en solidité, dans la même raison que sa hauteur seroit plus grande.

XX.

Deux prismes qui ont la même hauteur, sont en même raison que leurs bases.

On remarquera ensuite, que deux prismes droits qui auroient la même hauteur, mais dont l'un auroit une base qui contiendroit un certain nombre de fois la base de l'autre, seroient entr'eux dans

dans la même raiſon que leurs baſes. La vérité de cette propoſition s'apperçoit facilement en faiſant attention à la formation des priſmes expliquée dans l'article XVII.

Que *abcdefghiklm* & ABCDEFGH IKLM ſoient les deux priſmes qui ont la même hauteur, & que la baſe *abcdlm* du plus petit ſoit, par exemple, le quart de la baſe ABCDLM. Puiſque les deux priſmes ſont produits par les mouvemens de ces deux baſes, il s'enſuit qu'un plan quelconque, qui ſera parallele au plan où ſont les deux baſes, coupera dans les deux priſmes deux polygones, dont chacun ſera égal à la baſe du priſme où il ſera coupé; c'eſt-à-dire, que la ſection du grand priſme ſera toujours quadruple de celle du petit. Donc le priſme ABCDEFG HIKLM pourra être regardé comme compoſé de tranches toutes quadruples de celles du priſme *abcdefghiklm*; & par conſéquent, la ſolidité du pre- FIG. 10 & 11.

mier prisme sera quadruple de celle du second.

XXI.

La mesure du prisme droit est le produit de sa base par sa hauteur.

APRÈS ces deux remarques, il ne sera pas difficile de former la regle suivante pour mesurer tous les prismes droits.

On mesurera d'abord en pieds quarrés, ou en pouces quarrés, &c. l'aire de la base du prisme proposé, ensuite on multipliera le nombre qu'on aura trouvé, par le nombre des pieds, ou des pouces, &c. que contiendra la hauteur du prisme; & le produit donnera le nombre des pieds cubes, ou des pouces cubes, &c. contenus dans le prisme proposé, & sera, par conséquent, sa mesure.

XXII.

Les prismes obliques différent des prismes droits, en ce que les faces qui sont des rectan-

LE nom de prisme se donne encore aux solides (Fig. 13.) qui ont deux bases polygones égales, ainsi que les précédens, mais dont les autres faces

ſont des parallelogrammes, au lieu d'être des rectangles. Pour diſtinguer ces nouveaux priſmes de ceux dont nous venons de parler, on les appelle des priſmes obliques, par oppoſition aux autres qu'on avoit nommés des priſmes droits.

gles dans ceux-ci, ſont des parallelogrames dans ceux-là.

XXIII.

Formation des priſmes obliques.

Fig. 13.

On conçoit les priſmes obliques formés par une baſe *abcki* qui ſe meut parallelement à elle-même, & de telle façon que ſes angles ſuivent des lignes paralleles *ag*, *bh*, *cd*, &c. qui s'élevent hors du plan de la baſe, & qui ne lui ſont point perpendiculaires.

XXIV.

L'Analogie qu'il y a entre cette formation & la formation des priſmes droits dont nous avons parlé (Article XVII.) donne facilement la meſure de la ſolidité des priſmes obliques; car ſi on imagine à côté d'un priſme

FIG. 12 & 13. oblique *abcdefghik*, un prisme droit ABCDEFGHIK qui ait la même base, & que ces deux prismes soient renfermés entre deux plans paralleles, on verra que la solidité de ces deux corps sera absolument la même.

Car, si par un point quelconque P de la hauteur on fait passer un plan parallele à la base, les sections NOPQR & *nopqr* que ce plan formera dans chacun des deux prismes, pourront être regardées comme les bases égales ABCKI & *abcki* arrivées en NOPQR & *nopqr* par le mouvement qui forme ces deux prismes; & ainsi ces deux sections seront des polygones égaux.

Or si toutes les tranches imaginables qu'on peut former dans ces deux prismes par des mêmes plans coupans, sont égales, il faudra que les assemblages de ces tranches, c'est-à-dire les prismes, soient égaux aussi.

Les prismes obliques sont égaux aux prismes

On énonce ordinairement ainsi cette proposition: les prismes obliques sont

égaux aux prismes droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur. On appelle la hauteur du prisme la perpendiculaire abaissée du plan supérieur sur l'inférieur, ou sur son prolongement.

droits, lorsqu'ils ont même base & même hauteur.

XXV.

Et comme les parallelipipedes doivent être mis au nombre des prismes, on étendra ce que nous venons de dire des prismes aux parallelipipedes obliques; c'est-à-dire, aux figures *abcdefgh**, produites en faisant mouvoir un quarré, un rectangle, ou même un parallelogramme, de maniere que ses quatre angles suivent des lignes paralleles qui s'élevent obliquement de la base. Ainsi, le parallelipipede oblique *abcdefgh* sera égal au parallelipipede droit ABCDE FGH, si la base *abgh* est la même, ou a la même superficie que la base ABGH, & si la perpendiculaire abaissée du plan *dcfe* sur le plan *abgh*, est égale à la perpendiculaire abaissée du

Il en est de même des parallelipipedes obliques, à l'égard des parallelipipedes droits.

* Pl. XII. Fig. 1 & 2.

plan DCFE ſur le plan ABGH.

XXVI.

Fig. 3.

Les pyramides ſont des corps renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même ſommet, & qui ſe terminent à une baſe polygone quelconque.

Ayant vû ce qui concerne les parallelipipedes & les priſmes, examinons maintenant les pyramides ; c'eſt-à-dire, les corps tels que ABCDEFG, renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même ſommet A, & qui ſe terminent à une baſe polygone quelconque BCDEFG. Il eſt néceſſaire de conſidérer ces ſortes de ſolides, non-ſeulement parce qu'on en rencontre dans les bâtimens & dans les autres ouvrages à conſtruire, mais parce que tous les ſolides terminés par des plans, ſont des aſſemblages de pyramides, ainſi que les figures rectilignes ſont des aſſemblages de triangles. Il ne faut, pour s'en aſſurer, que tirer d'un point pris où l'on voudra dans l'intérieur du corps propoſé, des lignes à tous les angles de ce corps.

XXVII.

Elles retiennent le nom de leur base.

On distingue les pyramides les unes des autres, ainsi que les prismes, par le nom de la figure qui leur sert de base.

XXVIII.

On les distingue en pyramides droites & en obliques.

Lorsque la pyramide a pour base une figure réguliere, & que son sommet répond perpendiculairement au centre H de sa base, ainsi que dans la Fig. 3, la pyramide est alors appellée pyramide droite; elle est nommée, au contraire, pyramide oblique, lorsque le sommet n'est pas perpendiculairement au-dessus du centre, ainsi que dans la Fig. 5.

XXIX.

Pour découvrir la maniere de mesurer toutes sortes de pyramides, tant droites qu'obliques, nous commencerons par faire sur ces figures, quelques

réflexions générales, auxquelles on est conduit par la connoissance des propriétés des prismes.

Lorsqu'on fait attention à l'égalité des prismes qui ont même base & même hauteur, il est naturel qu'on se rappelle que les parallelogrammes sont aussi égaux entr'eux lorsqu'ils ont ces mêmes conditions; & qu'il en est encore de même des triangles. Ces trois vérités se présentant à la fois à l'esprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui sont communes aux parallelogrammes & aux triangles, peuvent l'être aussi aux prismes & aux pyramides; on doit donc soupçonner que les pyramides qui ont même base & même hauteur, ont la même solidité.

XXX.

Les réflexions suivantes confirmeront ce soupçon.

Fig. 4 & 5. Soient ABCDE & *abcde* deux pyramides dont les hauteurs AH & *ah*

ſoient les mêmes, & dont les baſes ſoient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux BCDE & *bcde*; ſi on conçoit que ces deux pyramides ſoient coupées par une infinité de plans paralleles à leurs baſes, on imaginera ſans peine que ces coupes de pyramides donneront des quarrés égaux IKLM & *iklm*; & par conſéquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des aſſemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides ſeront égales chacune à ſa correſpondante. Donc, conclura-t-on, la ſomme des tranches eſt la même de part & d'autre : c'eſt-à-dire, que les deux pyramides ont la même ſolidité.

Si les baſes des deux pyramides étoient d'autres polygones réguliers ou irréguliers BCDEF & *bcdef*, égaux entr'eux, il n'y a perſonne qui ne penſât encore, que toutes les tranches IKLMN & *iklmn* de l'une & de l'autre de ces deux pyramides devroient FIG. 6 & 7.

être égales entr'elles ; & qui n'en conclût, par conséquent, que les pyramides auroient toujours la même solidité, lorsqu'elles auroient même base & même hauteur.

XXXI.

Tout cela est aisé à imaginer après la démonstration que nous avons donnée de l'égalité des prismes qui ont même hauteur ; cependant la similitude entre la tranche quelconque IKLMN d'une pyramide & la base BCDEF, & l'égalité des tranches IKLMN & *iklmn*, sont de ces propositions, qui quoique sensibles pour tout le monde, ont à la rigueur besoin d'une démonstration ; or pour trouver cette démonstration, on est obligé d'entrer dans plusieurs considérations sur la similitude des figures solides.

XXXII.

Reprenons la pyramide ABCDEF, & supposons-la coupée par un plan

IKLMN parallele à la baſe, nous allons démontrer que la ſection ou la coupe formée par ce plan dans la pyramide, eſt un polygone parfaitement ſemblable au polygone BCDEF; & que la pyramide AIKLMN eſt elle-même entierement ſemblable à la pyramide ABCDEF : c'eſt-à-dire, que les angles que forment toutes les lignes de ces deux figures, ſont reſpectivement égaux; & que tous les côtés de la petite pyramide auront le même rapport entr'eux que ceux de la grande.

En quoi conſiſte la ſimilitude de deux pyramides.

XXXIII.

COMMENÇONS par obſerver que ſi deux plans X & Y ſont paralleles, & que deux lignes quelconques ALD & AME partant d'un même point A, traverſent ces deux plans, les droites LM & DE qui joindront les points L, M, D & E, ſeront paralleles. La raiſon en eſt, que ſi ces deux lignes n'étoient pas paralleles, elles ſe

FIG. 8.

rencontreroient quelque part, étant prolongées; mais ſi elles ſe rencontroient, les plans dans leſquels elles ſont & dont elles ne peuvent pas ſortir, en les prolongeant autant qu'il ſeroit néceſſaire, ſe rencontreroient donc auſſi. Donc ils ne ſeroient pas paralleles, ainſi qu'on le ſuppoſe.

XXXIV.

Si on ſuppoſe donc que le plan
Fig. 6. IKLMN ſoit parallele au plan BCD EF, il s'enſuivra que toutes les lignes ML, LK, KI, IN & NM, ſeront paralleles aux lignes ED, DC, CB, BF & FE; & par conſéquent, que les triangles ALM, AKL, AIK, &c. ſeront ſemblables aux triangles ADE, ACD, ABC, &c. Si on prend l'un des côtés de ces triangles, AM par exemple, pour échelle, ou pour commune meſure de tous les côtés de la petite pyramide, pendant que le côté correſpondant AE ſervira d'échelle aux côtés de la grande,

on verra ſans peine, que les côtes ML, LK, KI, &c. du polygone IKLMN, ſeront proportionnels aux côtés ED, DC, CB, &c. du polygone BCDEF.

On verra auſſi facilement, que tous les angles IKL, KLM, &c. ſeront reſpectivement égaux aux angles BCD & CDE; puiſque les premiers ſeront formés par des lignes paralleles aux côtés des ſeconds. Donc les deux polygones IKLMN & BCDEF ſeront ſemblables.

XXXV.

Or les côtés AM, AL, AK, &c. étant proportionnels aux côtés AE, AD, AC, &c. & les angles ALM, ALK, &c. reſpectivement égaux aux angles ADE, ADC, &c. à cauſe de la reſſemblance des triangles ALM, ADE, ALK, ADC, &c. les deux pyramides AIKLMN & ABCDEF ſeront entierement ſemblables.

XXXVI.

Enfin, si du point A on mene AH perpendiculaire au plan sur lequel est construit le polygone BCDEF, & que Q soit le point où cette perpendiculaire rencontre le plan du polygone IKLMN, il est clair que les droites AQ & AH, hauteurs des deux pyramides AIKLMN & ABCDEF, seront entr'elles dans la même raison que les côtés homologues AM, AE, AL, AD, &c. ou, ce qui revient au même, que si on prend les hauteurs AQ & AH pour les échelles des deux pyramides, les côtés AM, AL, &c. contiendront autant des parties de AQ, que les côtés AE, AD, &c. contiendront des parties de AH.

XXXVII.

Qu'on revienne maintenant à considérer les deux pyramides ABCDEF & *abcdef*, à la fois : on verra que les deux

Fig. 6 & 7.

tranches IKLMN & *iklmn*, étant semblables aux bases BCDEF & *bcdef* qui sont les mêmes, elles seront semblables entr'elles. On verra de plus, que ces deux tranches seront égales entr'elles, puisque les échelles de ces deux figures sont les droites égales AQ & *aq*, hauteurs des pyramides AIKLMN & *aiklmn*.

Donc, sans connoître quelle est la solidité des pyramides, on sait déja avec certitude, que si elles ont même hauteur & même base, elles sont égales, ainsi que nous l'avions soupçonné (Article XXIX.)

Les pyramides qui ont même base & même hauteur, sont égales.

XXXVIII.

Si les bases des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étoient seulement égales en superficie, les pyramides seroient encore égales en solidité. Car soient *abcdef** & *arst* deux pyramides qui ont la même hauteur *ah*, si on coupe ces deux pyramides par

Deux pyramides sont encore égales, si ayant la même hauteur, leurs bases, sans être des polygones semblables, sont égales en superficie.

* FIG. 7 & 9.

un plan quelconque parallele à la base, il est évident qu'il y aura même rapport de l'aire *iklmn* à l'aire *bcdef*, que de l'aire *uxy* à l'aire *rst*; puisque *iklmn* & *bcdef* étant (Article XXXIV.) des figures semblables, elles ne different (I. Part. Art. XLVIII.) que par leurs échelles *aq*, *ah*, &c. & que les figures *uxy* & *rst* étant aussi semblables, elles ne different non plus que par leurs échelles, qui sont encore les lignes *aq* & *ah*.

Mais si les bases *rst* & *bcdef* sont égales en superficie, leurs parties proportionnelles *uxy* & *iklmn* seront donc égales. Donc toutes les tranches des deux pyramides *arst* & *abcdef* auront la même étendue. Donc leurs assemblages, c'est-à-dire, les pyramides mêmes, seront égales en solidité.

XXXIX.

Les pyramides qui ont même hauteur,

SI la base *bcdef* de la premiere pyramide contenoit un certain nombre de fois

fois la base *rst*, la solidité de la premiere pyramide *abcdef*, contiendroit le même nombre de fois la solidité de la seconde *arst*.

sont entr'elles comme leurs bases.

Car, en ce cas, la base *bcdef* étant divisée en plusieurs parties dont chacune fût égale à la base *rst*, on pourroit concevoir la pyramide *abcdef* comme composée de plusieurs autres pyramides, qui auroient pour bases les parties de *bcdef*. Or chacune de ces nouvelles pyramides seroit égale à la seconde pyramide *arst*, selon ce que nous avons prouvé dans l'article précédent. Donc, &c.

Que si la base *rst* n'étoit pas contenue exactement dans la base *bcdef*, mais que ces deux bases eussent une mesure commune X, on diviseroit chacune des deux bases *bcdef* & *rst* en des parties égales à X, & on verroit que les deux pyramides *abcdef* & *arst* seroient composées d'autant de pyramides nouvelles, toutes égales entr'elles,

que les deux bafes contiendroient de parties X. Donc les pyramides *abcdef* & *arft* feroient entr'elles comme leurs bafes.

Et fi les bafes étoient incommenfurables, on feroit toujours voir, malgré cela, que les pyramides feroient entr'elles en même raifon que leurs bafes, en fe fervant d'une induction femblable à celle qu'on a employée dans un pareil cas (II. Part. Art. XXVIII.) lorfqu'il s'agiffoit de comparer les figures dont les côtés étoient incommenfurables; c'eft-à-dire, qu'on diminueroit à l'infini la mefure X, de façon qu'elle pût être cenfée mefure commune, tant de la bafe *rft* que de la bafe *bcdef*.

XL.

Ayant découvert que les pyramides qui ont même hauteur, font en même raifon que leurs bafes, on doit fentir que la mefure de leur folidité

ne renferme plus que très-peu de difficulté.

Car il ne s'agit plus que de ſavoir meſurer une ſeule pyramide, pour meſurer toutes les autres. Suppoſons, par exemple, que nous ſachions meſurer la pyramide ABCDE, & qu'on nous demande la meſure de la pyramide ASTVXY, qui n'a ni la même baſe ni la même hauteur que la premiere, nous commencerons par faire une pyramide ſemblable à la pyramide ABCDE, & qui ait la hauteur de la pyramide ASTVXY, ce qui ſera bien aiſé; car il ſuffira (Article XXXV.) de prolonger les côtés AB, AC, AD & AE, & de les couper par le plan LMNO, dont la diſtance AG au ſommet A ſoit égale à la hauteur AO. Fig. 10 & 11.

Cela fait, puiſque par la ſuppoſition nous ſavons meſurer la pyramide AB CDE, il eſt évident que nous ſaurons meſurer auſſi la pyramide ALMNO, qui lui eſt ſemblable; car quelles que

ſoient les opérations par leſquelles on meſure la pyramide ABCDE, on pourra toujours faire les mêmes opérations pour meſurer la pyramide ſemblable ALMNO, à cela près qu'on employera dans celle-ci une échelle différente.

Suppoſons donc que la pyramide ALMNO ſoit meſurée, ſa meſure déterminera auſſi celle de la pyramide propoſée ASTVXY; car par l'article précédent, ces deux pyramides ſont entr'elles comme leurs baſes LMNO & STVXY, & nous avons d'ailleurs enſeigné dans la ſeconde Partie à trouver le rapport de ces deux baſes.

XLI.

PUISQU'IL ne s'agit donc que de meſurer une ſeule pyramide pour ſavoir meſurer toutes les autres pyramides imaginables, propoſons-nous-en une extrêmement ſimple, qu'on peut
FIG. 12. former en tirant des quatre angles A, B, C & H d'une des faces d'un cube

ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube ; c'eſt-à-dire, le point également diſtant de A, D, B, E, &c.

On voit, ſans peine, que cette pyramide eſt la ſixiéme partie du cube, puiſqu'on peut décompoſer le cube en ſix pyramides pareilles, en prenant chaque face pour baſe. Or la valeur du cube eſt le produit de la hauteur AF par la baſe ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en ſix parties égales ; ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la ſixiéme partie de la hauteur AF par la baſe AB CH ; & comme la ſixiéme partie de la hauteur AF eſt le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puiſque ſa hauteur OL eſt la moitié du côté du cube, il s'enſuit que la meſure de la pyramide OABCH eſt le produit du tiers de ſa hauteur par ſa baſe.

XLII.

SUPPOSONS préſentement qu'on ait à meſurer une pyramide quelconque OKMNSTV, on imaginera un cube dont le côté AB ou AF ſoit double de la hauteur OL de la pyramide propoſée, & on concevra dans ce cube une pyramide OABCH dont la pointe ſoit au centre, & qui ait pour baſe une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la premiere; & par conſéquent, (Article XXXIX.) la ſolidité de OABCH ſera à celle de OKMNSTV, comme la baſe ABCH à la baſe KMNSTV; or par l'article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la baſe ABCH, eſt la valeur de la pyramide OABCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la baſe KMNSTV, ſera la valeur de la pyramide propoſée OKMNSTV.

FIG. 11 & 12.

Et par-là, on découvre ce théorême

La ſolidité d'une pyramide quel-

général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

conque; est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

XLIII.

COMME nous avons vû (Article XXI.) que la solidité d'un prisme est le produit de sa base par sa hauteur, il est clair par l'article précédent, que les pyramides seront toujours le tiers des prismes qui auront même base & même hauteur.

La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.

XLIV.

APRÈS avoir mesuré tous les solides terminés par des plans, nous allons chercher le chemin qu'on peut avoir suivi pour mesurer les solides dont les surfaces sont courbes. Et comme nous n'avons traité dans la troisiéme Partie, que des figures dont les contours ne renferment d'autres courbes que le cercle, nous n'examinerons que les corps dont les courbures sont circulaires.

Dans l'examen de ces corps nous aurons deux objets, la meſure de leurs ſurfaces & celle de leurs ſolidités; car ces ſurfaces étant ou entiérement courbes, ou en partie planes & en partie courbes, nous ne pourrons renvoyer leur meſure à la premiere Partie, ainſi que nous l'avons fait des corps terminés par des plans.

XLV.

PLAN. XIII. FIG. 1 & 2. Le cylindre eſt un ſolide terminé par deux baſes oppoſées & paralleles qui ſont des cercles égaux, & par un plan plié autour de leurs circonférences.

LE plus ſimple de tous les ſolides courbes eſt le cylindre; c'eſt un corps comme ABCDEF, dont les deux baſes ABC & DEF ſont deux cercles égaux & paralleles, joints par une ſurface courbe qu'on peut imaginer formée par un plan plié autour de leurs circonférences.

FIG. 1. On le diſtingue en cylindre droit, & en cylindre oblique.

Lorſque les deux cercles ſont placés de façon que le centre G du premier réponde perpendiculairement au-deſſus du centre H du ſecond, le cylindre ſe nomme droit.

Le cylindre ſe nomme au contraire oblique, lorſque la ligne tirée par les deux centres G & H, eſt oblique à l'égard des plans ABC & DEF. FIG. 2.

XLVI.

Formation du cylindre.

LA formation géométrique de ces ſolides, analogue à celles des priſmes & des parallelipipédes, dont il a été parlé (Article XVII.) conſiſte à faire mouvoir un cercle parallelement à lui-même, en ſorte que tous ſes points décrivent des lignes droites paralleles qui s'élevent hors du plan de ce cercle.

XLVII.

ON parviendra, de la maniere ſuivante, à meſurer la ſurface d'un cylindre droit; ce qui eſt ſouvent néceſſaire dans la pratique.

Les deux circonférences ABC & DEF étant partagées chacune en un même nombre de parties égales, les points de diviſion répondans les uns FIG. 1.

au-dessus des autres, qu'on tire des lignes droites qui joignent les angles correspondans des deux polygones réguliers que donne cette opération, il est clair qu'on aura alors un prisme dont la superficie sera composée d'autant de rectangles renfermés dans la surface du cylindre, qu'il y a de côtés renfermés dans chacune des circonférences ABC & DEF. Or tous ces rectangles ayant chacun leur hauteur égale à AD, leur mesure totale sera le produit de la hauteur AD par la somme de toutes les bases; c'est-à-dire, par le contour du polygone renfermé ou inscrit dans le cercle DEF ou ABC.

Mais comme à mesure que le nombre des côtés de ce polygone sera plus grand, le contour du polygone approchera de plus en plus d'être égal à la circonférence, & la surface du prisme d'être égale à celle du cylindre; il s'ensuit que si on imagine que le nombre des côtés de ce polygone devien-

La surface courbe d'un cylindre

ne infini, le prisme ne différera pas du cylindre. La surface courbe du cylindre droit est donc égale à un rectangle dont la hauteur seroit AD, & la base une ligne droite égale à la circonférence DEF.

droit est égale à un rectangle qui a la même hauteur, & dont la base est égale à sa circonférence.

Cette proposition peut servir à trouver, par exemple, ce qu'il faudroit d'étoffe pour envelopper un pilier cylindrique, ou pour tapisser le dedans d'une Tour ronde.

XLVIII.

QUANT à la surface du cylindre oblique, on ne peut pas la mesurer de la même maniere, parce qu'au lieu de rectangles on auroit des parallelogrammes de hauteurs différentes. Ce n'est que par des méthodes très-compliquées & très-difficiles qu'on est parvenu à connoître seulement la valeur approchée de cette surface; & les problêmes de ce genre ne sont pas du ressort des Elémens.

XLIX.

A l'égard de la ſolidité des cylindres, ſoit droits ſoit obliques, rien ne ſera plus aiſé que de la trouver. Car il eſt évident que tout ce que nous avons dit des priſmes conviendra aux cylindres, ſi on regarde les cylindres comme les derniers des priſmes qu'on peut leur inſcrire.

Les cylindres qui ont même baſe & même hauteur, ſont égaux en ſolidité.

Ainſi les cylindres qui auront même baſe & même hauteur, ſeront égaux en ſolidité.

L.

La meſure d'un cylindre quelconque eſt le produit de ſa baſe par ſa hauteur.

Et la meſure d'un cylindre quelconque conſiſtera dans le produit de ſa baſe par ſa hauteur.

LI.

Le cône eſt le ſolide courbe le plus ſimple après le cylindre : c'eſt une figure comme ABCDE dont la baſe eſt un cercle ; & dont la ſurface eſt com-

Fig. 3 & 4.

posée d'une infinité de lignes droites, qui aboutissent toutes du sommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce solide comme une pyramide dont la base seroit un cercle.

Le cône est une espece de pyramide, dont la base est un cercle.

L I I.

Si, comme dans la figure 3, la pointe ou sommet A du cône répond perpendiculairement au-dessus du centre O de la base, le cône est nommé cône droit; & il est nommé oblique, si le sommet répond à un point différent du centre de la base, ainsi que dans la figure 4.

On les distingue en cône droit, & en cône oblique.

L I I I.

Pour mesurer la surface d'un cône droit ABCDE, on le regardera comme la derniere des pyramides qu'on peut lui inscrire; c'est-à-dire, qu'on divisera la circonférence de sa base BCDE, ainsi qu'on a fait de la circonférence du cylindre, en une infinité de petits côtés, & tirant des lignes de tous

Fig. 3.

les angles au ſommet du cône A, on trouvera que la ſuperficie cônique eſt un aſſemblage d'une infinité de petits triangles iſoſceles, dont la hauteur eſt égale au côté AB du cône, & dont toutes les baſes ajoutées enſemble, ſont égales à la circonférence BCDE; d'où il eſt aiſé de voir que la meſure de cette ſurface ſe trouvera en multipliant la moitié de AB par la circonférence BCDE.

La ſurface d'un cône droit ſe meſure en multipliant la moitié de ſon côté par la circonférence de ſa baſe.

LIV.

Si on ſe rappelle maintenant que la ſurface d'un ſecteur de cercle eſt (III. Partie Article X.) égale au produit de l'arc de ce ſecteur par la moitié du rayon, on verra que pour envelopper le cône droit ABCDE d'une ſurface pliante, comme du carton, &c. il faudroit prendre un ſecteur de cercle ALR, dont le rayon fût égal à AB, & dont l'arc fût égal à la circonférence BCDE.

Fig. 3 & 7.

Le développement d'un cône eſt un ſecteur de cercle.

L V.

LORSQUE le cône eſt oblique, la meſure de ſa ſurface, ainſi que celle du cylindre oblique, eſt fort difficile à connoître, même d'une maniere approchée; & c'eſt encore un problême au-deſſus des Elémens.

L V I.

QUANT à la ſolidité des cônes, ſoit droits ſoit obliques, on les regardera comme les dernieres des pyramides qu'on pourroit leur inſcrire, & on pourra leur appliquer en conſéquence ce qu'on a dit des pyramides en général.

Ainſi les cônes qui auront même baſe & même hauteur, feront égaux. Les cônes qui ont même baſe & même hauteur ſont égaux.

L V I I.

ET la ſolidité d'un cône quelconque, ſera le produit de la baſe par le tiers de ſa hauteur. Leur meſure eſt le produit de la baſe, par le tiers de la hauteur.

LVIII.

Fig. 5 & 6. On a quelquefois besoin de mesurer un corps comme BCDEFGH, qu'on appelle cône tronqué : c'est la partie qui reste d'un cône AFGH, lorsqu'on en a retranché un autre cône plus petit ABCDE, par une section parallele à la base FGH. Il est évident que la mesure de ce solide sera la différence entre les solidités des deux cônes ABCDE & AFGH.

LIX.

Quant à la surface d'un cône tronqué, s'il a été formé par la section d'un cône droit, on peut trouver quelque chose de plus simple que de mesurer séparément les surfaces de deux cônes, & de retrancher l'une de l'autre ; on employera pour cela la méthode suivante, qui est aisée à imaginer, après ce que nous avons dit (Article LIV.)

Fig. 6 & 7. Supposons que ALR soit le secteur qu'il

qu'il faudroit conſtruire pour pouvoir envelopper le cône AFGH. En décrivant du centre A & de l'intervalle AM égal à AB un arc MP, il eſt clair que l'eſpace MPRL ſeroit une portion de couronne propre à envelopper la ſurface cherchée du cône tronqué. Or ſi on imagine que les deux circonférences dont MP & LR ſont des arcs ſemblables, ſoient achevées, on aura une couronne entiere, dont la meſure (III. Part. Art. VIII.) ſera le produit de ML égale à BF, par la circonférence dont AN eſt le rayon, N étant le milieu de ML. Donc la portion de couronne MPRL, ou la ſurface du cône tronqué BCDEFGH qui lui eſt égale, ſe meſurera en multipliant ML par l'arc NQ; ou ce qui revient au même, en multipliant BF par la circonférence IKL de la ſection du ſolide propoſé, coupé par un plan parallele à la baſe, & qui paſſe par le milieu I du côté BF.

Maniere de meſurer la ſurface d'un cône tronqué.

L X.

La ſphere eſt le corps dont la ſurface a tous ſes points également éloignés du centre.

Le dernier des corps ſolides dont nous traiterons, ſe nomme ſphere ou globe; c'eſt celui dont la ſurface a tous ſes points également éloignés d'un même point qui en eſt le centre. On a ſouvent beſoin de meſurer cette ſurface; on voudra ſavoir, par exemple, ce qu'il faudroit de dorure pour une boule, combien on devroit prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme, &c.

L X I.

Fig. 8.

Soit X la ſphere dont on veut meſurer la ſuperficie, il eſt évident qu'on peut concevoir ce ſolide comme produit par la révolution d'un demi-cercle AMB, autour de ſon diametre AB.

Suppoſons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un polygone régulier d'un nombre infini

de petits côtés, ou, ſi on veut, d'un très-grand nombre de côtés; & propoſons-nous ſeulement de meſurer la ſurface Z, produite par la révolution de ce polygone. Il ſera facile de paſſer enſuite de la meſure de cette ſurface à la meſure de la ſurface de la ſphere, ainſi que nous avons paſſé de la meſure des figures rectilignes à celle du cercle. FIG. 9

LXII.

POUR meſurer la ſurface du ſolide Z, examinons la petite partie de cette ſurface, que produit un ſeul côté quelconque M*m* du polygone inſcrit, pendant qu'il tourne autour du diametre AB. Il eſt évident que ce côté M*m* décrit dans ce mouvement une ſurface de cône tronqué V. Car en prolongeant la droite *m*M juſqu'à ce qu'elle rencontre en T le diametre ou axe de révolution AB, ſi cette ligne TM*m* tourne en même-tems que le demi-cercle AMB, PL. XIV. FIG. 1.

elle décrira visiblement un cône droit, dont le sommet sera T, & la base, le cercle décrit par le point *m*, en sorte que la surface V produite par le mouvement de M*m*, sera une tranche de ce cône, enfermée entre les plans des cercles que les points M & *m* décrivent en tournant. Mais, selon que nous l'avons vû (Article LIX.) la surface V est égale à un rectangle dont M*m* est la hauteur, & la base, une ligne égale à la circonférence KLO décrite par le point K, milieu de M*m*. Donc la surface produite par la révolution du polygone, est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature, qu'il y a de côtés dans ce polygone, tels que M*m*.

Or comme tous les côtés M*m*, hauteurs de ces rectangles, sont supposés égaux, on pourroit regarder la surface cherchée, comme un rectangle total qui auroit la hauteur M*m*, avec une base égale à la somme de toutes les cir-

conférences telles que KLO, c'eſt-à-dire, décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le polygone inſcrit dans le demi-cercle AMB, ayant un très-grand nombre de côtés, la petiteſſe de la hauteur M*m*, & la grandeur exceſſive de la baſe, rendent ce rectangle inconſtructible.

Pour remédier à cet inconvénient, il eſt bien aiſé d'imaginer de changer tous ces petits rectangles en d'autres qui auroient toujours une même hauteur, non pas imperceptible comme M*m*, mais aſſez grande pour que chacune des baſes devînt fort petite; moyennant cela, l'addition de toutes ces petites baſes ne fera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

LXIII.

VOYONS donc ſi nous ne pourrons point changer de cette ſorte nos petits rectangles. Suppoſons d'abord, pour

ſimplifier le problême, que nos rectangles, au lieu d'avoir pour baſes des lignes égales aux circonférences KL,
FIG. 2. n'ayent pour baſes, que les rayons KI de ces circonférences. Il ne nous ſera pas difficile enſuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui ait pour meſure le produit de M*m* par KI, & qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que M*m*, & qui ſoit la même en quelqu'endroit que ſoit placé ce petit côté M*m*. Choiſiſſons, par exemple, la droite CK, qui eſt l'apothéme du polygone dont M*m* eſt le côté, & qui, par conſéquent, eſt toujours la même, à quelque côté du polygone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CK ſoit égal au produit de KI par M*m*, c'eſt-à-dire (II. Part. Art. VII.) qu'il faut

trouver une quatriéme proportionnelle aux trois lignes CK, KI & M*m*. Or nous ſavons que c'eſt par le moyen des triangles ſemblables, qu'on découvre des lignes proportionnelles à d'autres lignes. Il faut donc former des triangles ſemblables, dont les côtés homologues ſoient les lignes en queſtion: c'eſt ce qu'on fera en abaiſſant MR perpendiculaire à *mp*. On aura alors les triangles M*m*R & KIC qui ſeront ſemblables; car ils ſeront chacun rectangle, l'un en R, l'autre en I, & de plus, ils auront les angles *m*MR & IKC égaux entr'eux, à cauſe que le premier fait un angle droit avec l'angle M*m*R, égal à l'angle MKI, & que l'autre IKC fait auſſi un angle droit avec MKI.

De-là on peut conclure facilement que CK eſt à KI, comme M*m* à MR; c'eſt-à-dire, que MR eſt la quatriéme proportionnelle cherchée; ou, ce qui revient au même, que le rectangle de CK par MR ou par P*p*, eſt égal

au rectangle de M*m* par KI.

Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposé de changer, n'étoit pas celui de M*m* par KI; que c'étoit celui de M*m* par la circonférence dont KI est le rayon; nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entr'elles comme les rayons; ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de M*m* par KI, & celui de P*p* par CK, entraîne nécessairement l'égalité du rectangle de M*m* par la circonférence de KI, au rectangle de P*p* par la circonférence de CK. Car on voit facilement que si deux rectangles sont égaux, & que conservant leurs hauteurs on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

LXIV.

AYANT découvert dans les deux articles précédens, que toutes les petites surfaces côniques tronquées, telles

que V (Fig. 1.) ſont égales à autant de rectangles qui auroient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence dont CK ſeroit le rayon, & dont chacun auroit pour baſe une petite droite P*p* correſpondante à chaque côté M*m*, on en déduira qu'une ſomme quelconque de ces petites ſurfaces, priſe, par exemple, depuis A juſqu'en *p* ſera égale à un rectangle qui auroit pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK, & pour baſe la ſomme de toutes les lignes telles que P*p*, priſe depuis A juſqu'en *p*, c'eſt-à-dire, la droite A*p*.

Donc pour avoir la ſurface totale produite par la révolution du polygone entier, il faudra faire un rectangle dont la baſe ſoit égale à la circonférence décrite du rayon CK, & qui ait une hauteur égale au diametre A B.

LXV.

Il eſt bien aiſé maintenant de meſurer la ſurface de la ſphere. Car il

eſt clair que plus il y aura de côtés dans le polygone, plus le ſolide produit par ſa révolution approchera d'être égal à la ſphere, & plus auſſi l'apothéme CK approchera d'être égal au rayon; en ſorte que ſi on peut imaginer que le polygone ſoit devenu un cercle, l'apothéme CK ſera le rayon même, & la ſurface de la ſphere aura la même étendue qu'un rectangle dont la hauteur & la baſe ſeroient, l'une le diametre, & l'autre une ligne égale à la circonférence du cercle qui l'a produite, & qu'on appelle ordinairement le grand cercle de la ſphere.

La ſurface de la ſphere a pour meſure le produit de ſon diametre par la circonférence de ſon grand cercle.

LXVI.

Ce que c'eſt qu'un ſegment de ſphere.

* FIG. 3.

Comment on meſure ſa ſurface.

QUANT à la ſurface courbe d'un ſegment de ſphere AMLNO*; c'eſt-à-dire, de la partie qu'on retranche d'une ſphere, lorſqu'on la coupe par un plan MLNO perpendiculaire au diametre; elle a pour meſure le produit de ſon épaiſſeur ou fléche AP par la circonférence du grand cercle AMBN.

La raiſon en eſt la même que celle par laquelle on a prouvé (Article LXIV.) que la ſomme des ſurfaces de tous les petits cônes tronqués, compris depuis A juſqu'en *m*, eſt égale au rectangle dont la hauteur eſt A*p*, & la baſe une ligne égale à la circonférence dont CK eſt le rayon. FIG. 2.

LXVII.

LA meſure précédente de la ſurface de la ſphere apprend que ſi on fait tourner le rectangle ABDE, en même-tems que le demi-cercle AMNB autour de AB, la ſurface courbe du cylindre droit EFGIKDH produit par la révolution de ce rectangle, ſera égale à celle de la ſphere décrite par le demi-cercle; ce qu'on exprime ordinairement ainſi; la ſurface de la ſphere eſt égale à celle du cylindre circonſcrit. FIG. 4.

La ſurface de la ſphere eſt égale à celle du cylindre circonſcrit.

LXVIII.

ET ſi on coupe, tant le cylindre que la ſphere, par deux plans quelconques

Les tranches du cylindre & de la ſphere ont la même ſuperficie.

perpendiculaires au diametre AB, en P & en Q, les tranches du cylindre & de la ſphere qui ſeront produites par le mouvement de la droite OS & de l'arc MN, ſeront égales en ſuperficie.

LXIX.

La ſurface de la ſphere eſt égale à quatre fois celle de ſon grand cercle.

On voit encore, par ce qui précede, que la ſurface de la ſphere eſt égale à quatre fois l'aire de ſon grand cercle; car la ſurface de ce grand cercle a pour meſure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diametre par la circonférence, & la ſuperficie de la ſphere eſt égale au produit du diametre entier par la même circonférence.

LXX.

La meſure de la ſurface de la ſphere étant trouvée, il eſt bien aiſé de meſurer ſa ſolidité; car on peut conſidérer la ſphere comme l'aſſemblage d'une infinité de petites pyramides dont les ſommets ſont à ſon centre, & dont toutes les baſes couvrent la ſurface entie-

re. Or chacune de ces pyramides ayant pour meſure le produit du tiers de ſa hauteur, c'eſt-à-dire, du rayon, par ſa baſe, leur ſomme totale ou la ſolidité de la ſphere ſe meſurera en multipliant le tiers du rayon par ſa ſurface, c'eſt-à-dire, par quatre fois l'aire du grand cercle.

La ſolidité de la ſphere eſt le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.

LXXI.

COMME le produit du tiers du rayon par quatre fois le grand cercle, eſt la même choſe que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'eſt-à-dire, des deux tiers du diametre, par le grand cercle, & que la ſolidité du cylindre EFGIKDH a pour meſure le produit du diametre par le même grand cercle qui lui ſert de baſe; il s'enſuit que la ſolidité de la ſphere eſt les deux tiers de celle du cylindre circonſcrit.

La ſolidité de la ſphere eſt les deux tiers de celle du cylindre circonſcrit.

LXXII.

SI on ſe propoſoit de meſurer la

Mesure de la solidité d'un segment de sphere.

*Fig. 3.

solidité d'un segment de sphere AM LNO*, il est évident qu'il faudroit d'abord mesurer la portion de sphere produite par la révolution du secteur CAM; ce qui se feroit en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphere proposé AMLNO : ensuite on retrancheroit de cette mesure celle du cône produit par la révolution du triangle CPM, c'est-à-dire, le cône dont la base est le cercle MLNO & CP la hauteur, & le reste seroit la valeur demandée du segment.

LXXIII.

Nous finirons ces Elémens par quelques propositions sur la solidité & sur la superficie des corps semblables. Ces propositions se présentent fort naturellement, lorsqu'on réfléchit sur ce qui constitue la similitude de deux corps. On peut dire même qu'on ne peut guère manquer de les décou-

vrir par analogie, si on se rappelle ce que nous avons dit (I. Part. Art. XXXIV & suiv.) de la similitude des figures planes; c'est-à-dire de celles qui sont décrites sur des plans.

Nous avons déterminé (Art. XXXII.) en quoi consiste la similitude de deux pyramides; la définition que nous avons donnée alors des pyramides semblables, peut s'étendre à tous les corps terminés par des plans: c'est-à-dire, que deux corps de cette nature seront appellés semblables, si tous les angles formés par les côtés du premier sont les mêmes que les angles formés par les côtés du second, & si les côtés d'un de ces corps sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

En quoi consiste la similitude de deux corps terminés par des plans.

LXXIV.

QUANT aux corps qui ne sont pas terminés de tous les côtés par des plans, par exemple, les cylindres & les cônes, il est aussi facile de déterminer les con-

ditions nécessaires pour les rendre semblables.

Conditions qui déterminent la similitude de deux cylindres droits.

Deux cylindres droits seront semblables, si leurs hauteurs sont en même raison que les rayons de leurs bases.

LXXV.

Celle de deux cylindres obliques.

Si les cylindres sont obliques, il faudra de plus que les lignes qui joignent les centres des deux cercles, dans chacun de ces cylindres, fassent les mêmes angles sur les plans de leurs bases.

LXXVI.

Celle de deux cônes.

Les mêmes définitions peuvent s'appliquer aux cônes, en mettant, au lieu de la ligne qui passe par les centres des deux bases du cylindre, celle qui va du sommet du cône au centre du cercle qui lui sert de base.

LXXVII.

Pour que deux cônes tronqués soient semblables, il faut, en premier lieu, que les cônes dont ils sont portions

tions ſoient ſemblables l'un à l'autre; & en ſecond lieu, que leurs hauteurs ſoient entr'elles comme les rayons de leurs baſes.

Celle de deux cônes tronqués.

LXXVIII.

A l'égard des ſpheres, on voit bien qu'elles ſont toutes ſemblables les unes aux autres, ainſi que toutes les figures, ſoit ſolides, ſoit planes, qui n'ont beſoin que d'une ſeule ligne pour être déterminées, comme le cercle, le quarré, le triangle équilatéral, le cube, le cylindre circonſcrit à la ſphere, &c.

Les ſpheres, les cubes, & toutes les figures qui ne dépendent que d'une ſeule ligne, ſont toutes ſemblables.

LXXIX.

En général on pourra dire des figures ſolides ſemblables, comme on l'a dit des figures planes, qu'elles ne different que par les échelles ſur leſquelles elles ont été conſtruites.

En général les ſolides ſemblables ne different que par les échelles ſur leſquelles ils ſont conſtruits.

Cet expoſé ſeul bien conſidéré, conduit à deux propoſitions fondamentales

ſur la ſuperficie & ſur la ſolidité des corps ſemblables.

LXXX.

Les ſurfaces des ſolides ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

La premiere propoſition apprend que les ſurfaces de deux ſolides ſemblables, ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; qu'il y a, par exemple, même rapport entre les ſurfaces des deux pyramides ſemblables *z* & Z, qu'entre les quarrés *abcd* & ABCD, faits ſur les côtés *ab* & AB, qui ſe répondent dans ces deux pyramides.

Fig. 5 & 6.

Pour découvrir cette propoſition, on n'a beſoin que des raiſonnemens qu'on a employés (I. Part. Art. XLIII. & XLIV.) c'eſt-à-dire, qu'il faut ſeulement conſidérer que ſi P eſt l'échelle de la pyramide Z, & *p* l'échelle de la pyramide ſemblable *z*, les lignes qu'il faudra employer pour meſurer la ſurface de Z & celle du quarré ABCD, auront le même nombre de P, qu'il y

aura de parties p dans celles qu'il faut employer pour meſurer la ſurface de z, & celle du quarré *abcd.*

Car de-là il ſuit que le produit des lignes qui entrent dans la meſure de Z & de ABCD, donnera le même nombre de quarrés X faits ſur P, que le produit des lignes employées à meſurer z & *abcd* donnera de quarrés x faits ſur p. C'eſt-à-dire, que les nombres qui exprimeront le rapport de la ſurface de la pyramide Z au quarré ABCD, feront les mêmes que ceux qui exprimeront le rapport de la ſurface z au quarré *abcd.*

On feroit le même raiſonnement dans la comparaiſon de tous les autres corps ſemblables, ſoit que ces corps fuſſent terminés par des plans, ſoit qu'ils fuſſent terminés par des ſurfaces courbes; car les lignes employées à meſurer les ſuperficies de tous ces corps, auront toujours le même nombre des parties de leurs échelles; & par conſéquent, les produits de ces lignes contiendront un

même nombre de fois les quarrés de ces mêmes parties.

Et ſi les lignes néceſſaires pour meſurer la ſuperficie des corps ſemblables, étoient incommenſurables, il eſt clair que la démonſtration ſubſiſteroit toujours, pourvu qu'on employât ici les principes dont on s'eſt ſervi (II. Part. Art. XXVIII.) pour comparer les figures ſemblables, dont les côtés étoient incommenſurables.

LXXXI.

Les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons.

On prouveroit de la même façon, que les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons. Mais, pour le voir encore plus clairement d'une autre maniere, il ſuffira de ſe rappeller que les ſurfaces des cercles ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons (III. Part. Art. VI.) & que les ſurfaces des ſpheres ſont quadruples de leurs grands cercles (Article LXIX.)

LXXXII.

La proportionnalité entre les ſurfaces des corps ſemblables & les quarrés de leurs côtés homologues, eſt ſi générale, qu'elle s'applique autant aux corps qu'on ne ſait pas meſurer, qu'à ceux dont on connoît la meſure.

Sans ſavoir meſurer, par exemple, la ſurface d'un cylindre oblique, on peut affirmer que les ſurfaces de deux cylindres obliques ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des diametres des baſes de ces cylindres. Car en inſcrivant dans ces deux cylindres deux priſmes ſemblables, de tant de faces qu'on voudra, on verra, par ce qui précéde, que les ſurfaces de ces priſmes ſeront entr'elles comme les quarrés des diametres des baſes. Donc les cylindres mêmes, conſidérés comme les derniers des priſmes inſcrits, auront leurs ſurfaces dans le même rapport.

LXXXIII.

Les ſolides ſemblables ſont entre eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

La propoſition fondamentale pour la comparaiſon de la ſolidité des corps ſemblables eſt celle-ci.

Les ſolides ſemblables ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Cette propoſition ſe peut démontrer comme la précédente, en conſidérant que les figures ſemblables ne different que par les échelles ſur leſquelles elles ſont conſtruites.

Pour le faire voir le plus ſimplement qu'il nous ſera poſſible, nous nous ſervirons, par exemple, des deux priſmes ſemblables Z & *z*, & des deux cubes X & *x*, dont les côtés ſont égaux à AB & *ab*, lignes analogues dans ces deux priſmes; & nous prendrons de plus deux échelles AB & *ab*, diviſées en un aſſez grand nombre de parties, pour pouvoir meſurer les dimenſions de ces ſolides. Or cela poſé, il eſt clair qu'il ſe trou-

FIG. 7 & 8.

vera pareillement autant de cubes faits ſur les parties de *ab* dans le priſme *z* & dans le cube *x*, que de cubes faits ſur les parties de AB dans le priſme Z & dans le cube X.

On feroit le même raiſonnement pour tous les autres ſolides ; & ceux qui pourroient avoir des dimenſions incommenſurables, ſeroient auſſi dans la même raiſon que les cubes de leurs côtés homologues.

LXXXIV.

Les ſolidités des ſpheres, par exemple, ſont évidemment entr'elles, comme les cubes de leurs rayons.

Les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs rayons.

FIN.

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande.

Planche I.

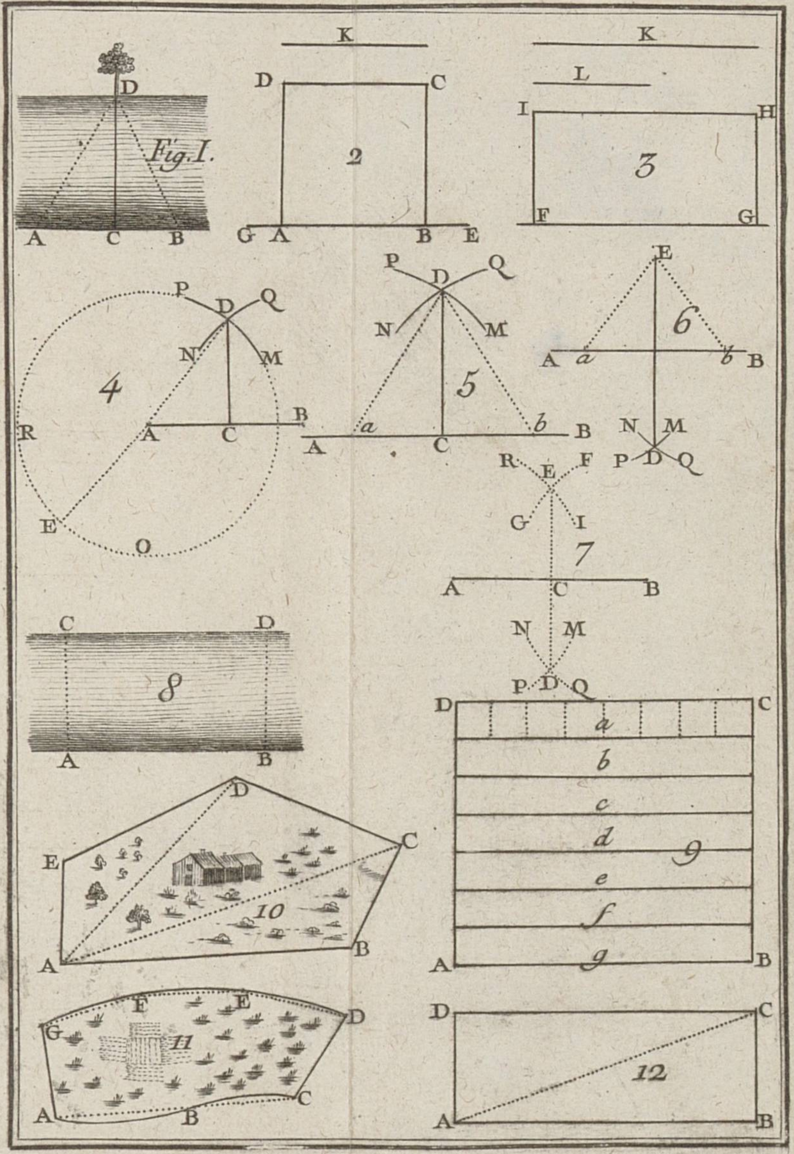


Fig. I.
D
A C B
K
D C
2
G A B E
K
L
I H
3
F G
P D Q
N M
4
R A C B
E O
P D Q
N M
5
A a C b B
E
6
A a b B
N M
P D Q
R E F
G I
7
A C B
N M
P D Q
C D
8
A B
D C
a
b
c
d
e
f
g
9
A B
D
E C
10
A B
F E
G D
11
A B C
D C
12
A B

Planche II.

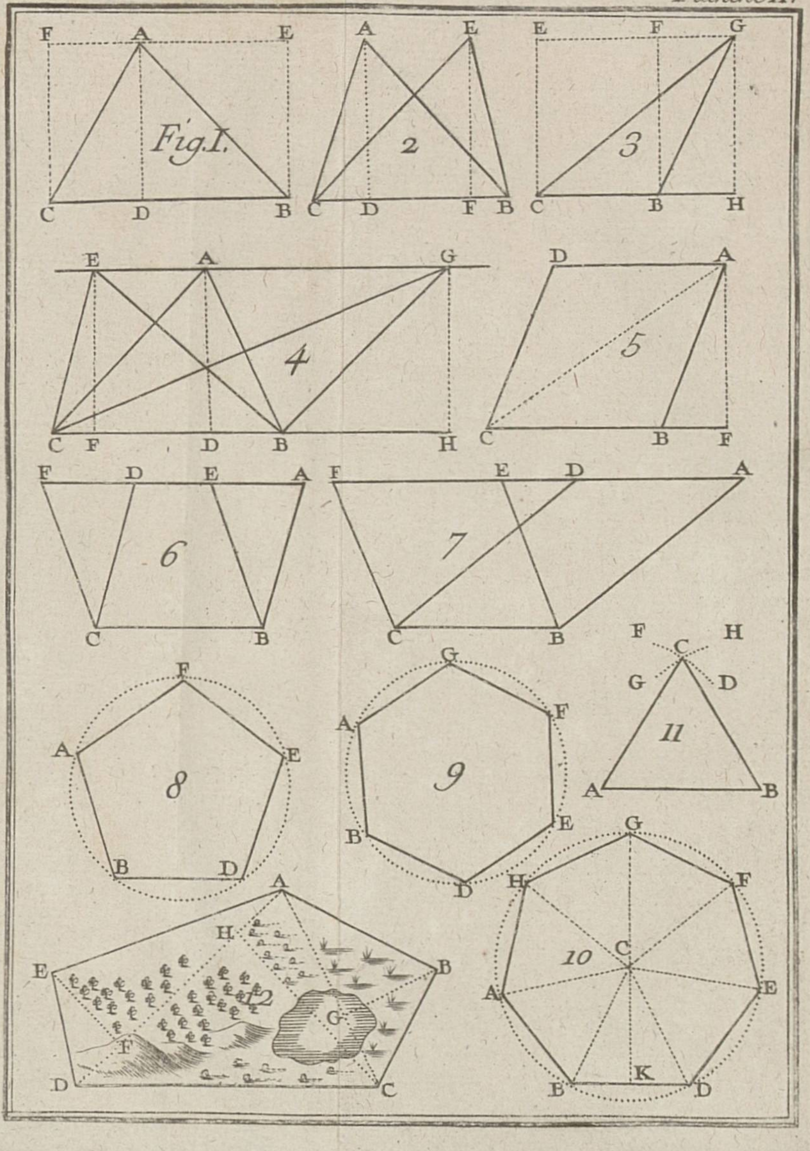


Planche III

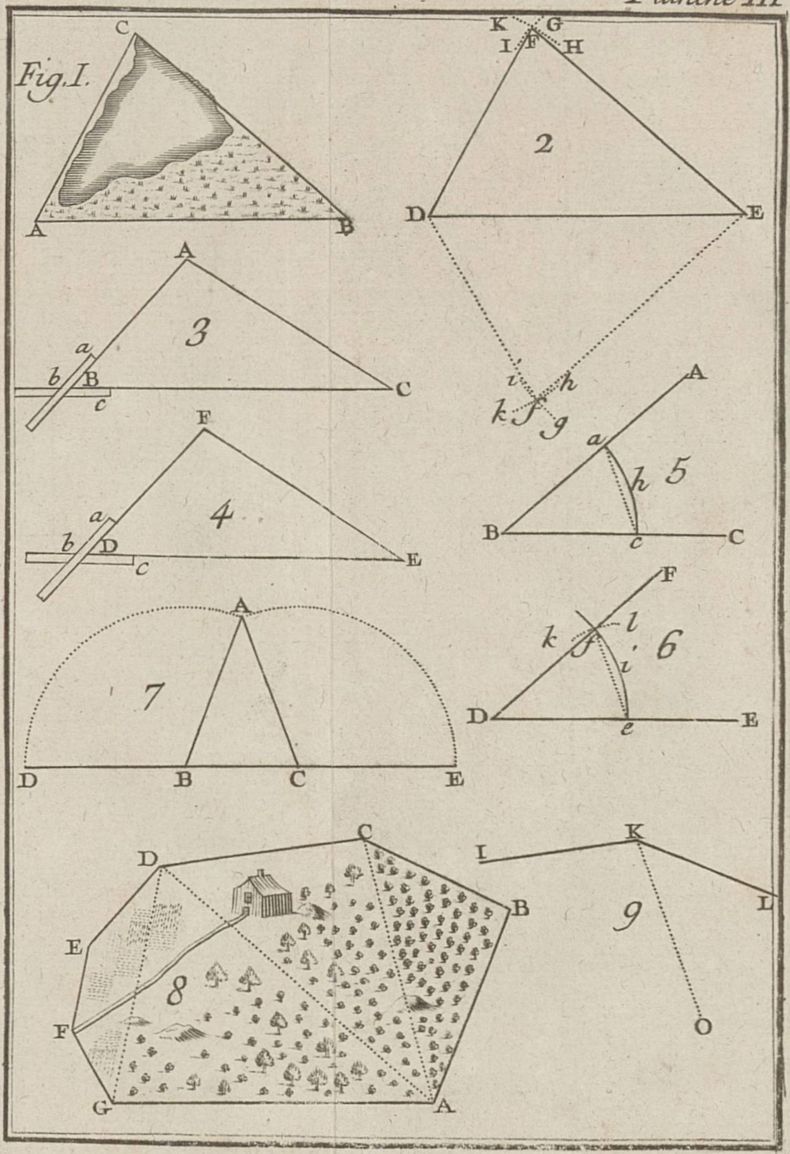


Planche IV

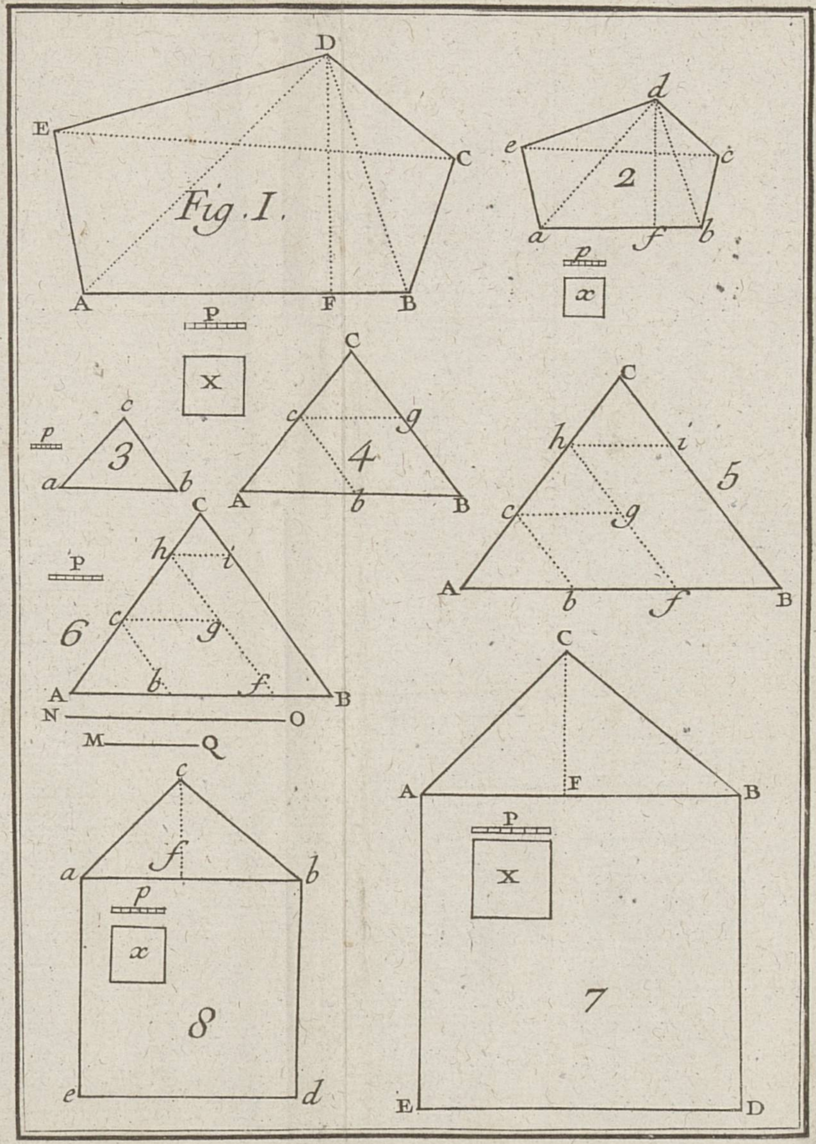


Fig. I.
D
E
C
A
F
B
P
X
d
e
c
2
a
f
b
p
x
C
c
g
4
A
b
B
c
3
a
b
p
C
h
i
5
c
g
A
b
f
B
C
h
i
6
c
g
A
b
f
B
P
N
O
M
Q
C
A
F
B
P
X
7
E
D
c
f
a
b
p
x
8
e
d

Planche V.

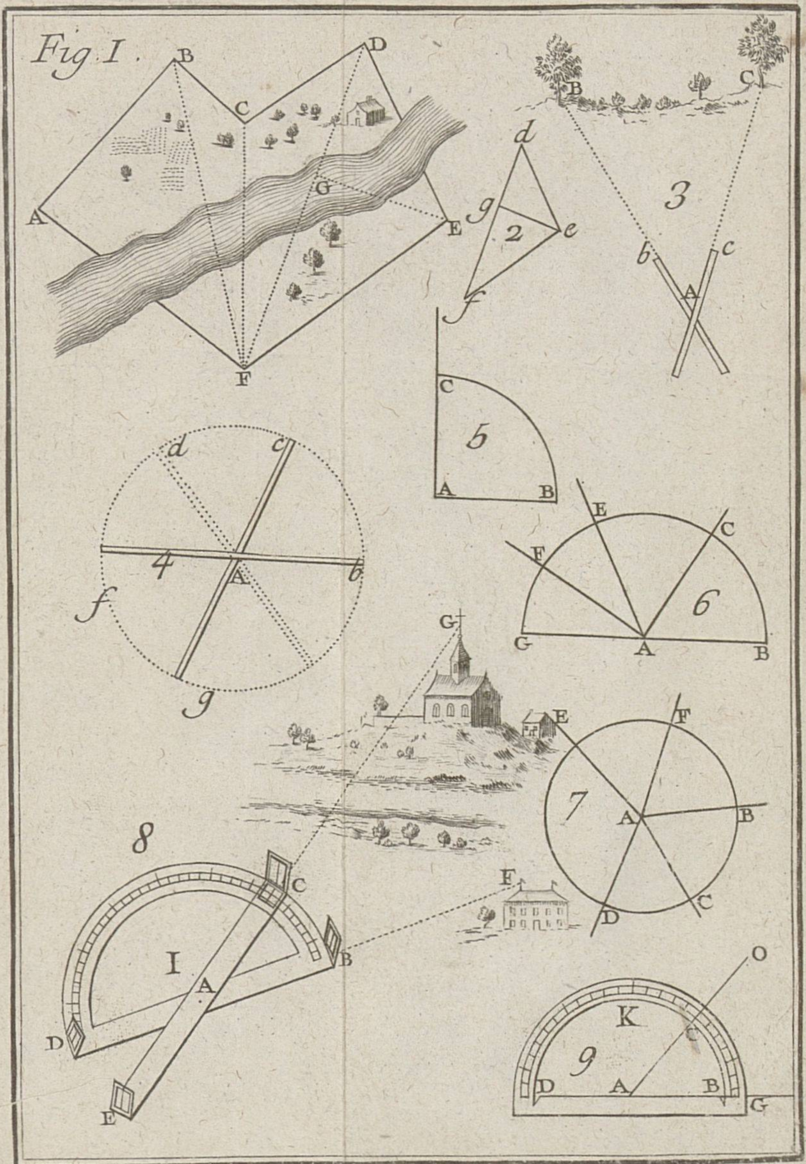


Fig. I.
A
B
C
D
E
F
G
2
d
g
e
f
3
B
C
b
c
A
4
d
c
b
f
g
A
5
C
A
B
6
E
F
C
G
A
B
7
E
F
A
B
C
D
G
8
I
A
C
B
D
E
F
9
K
O
C
D
A
B
G

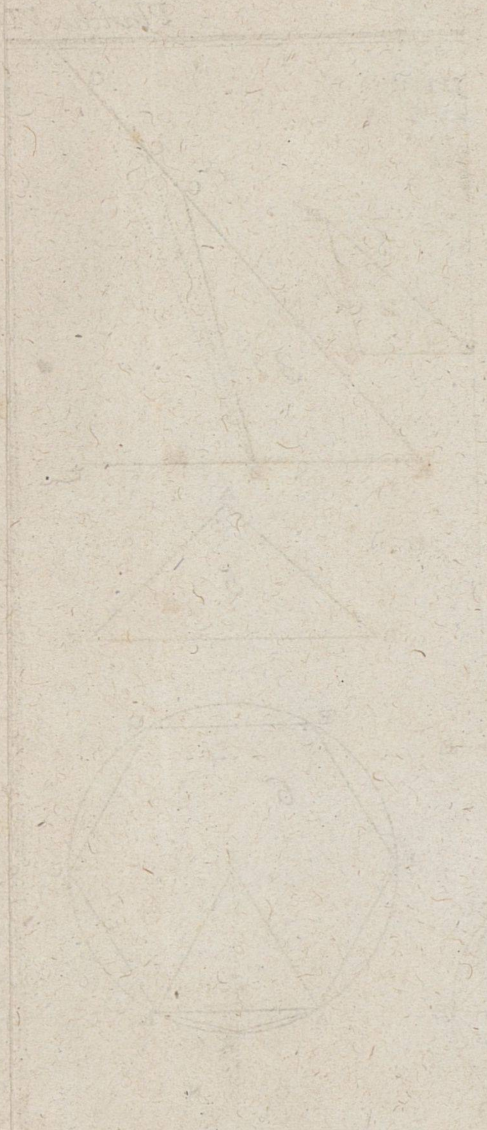


Planche VI

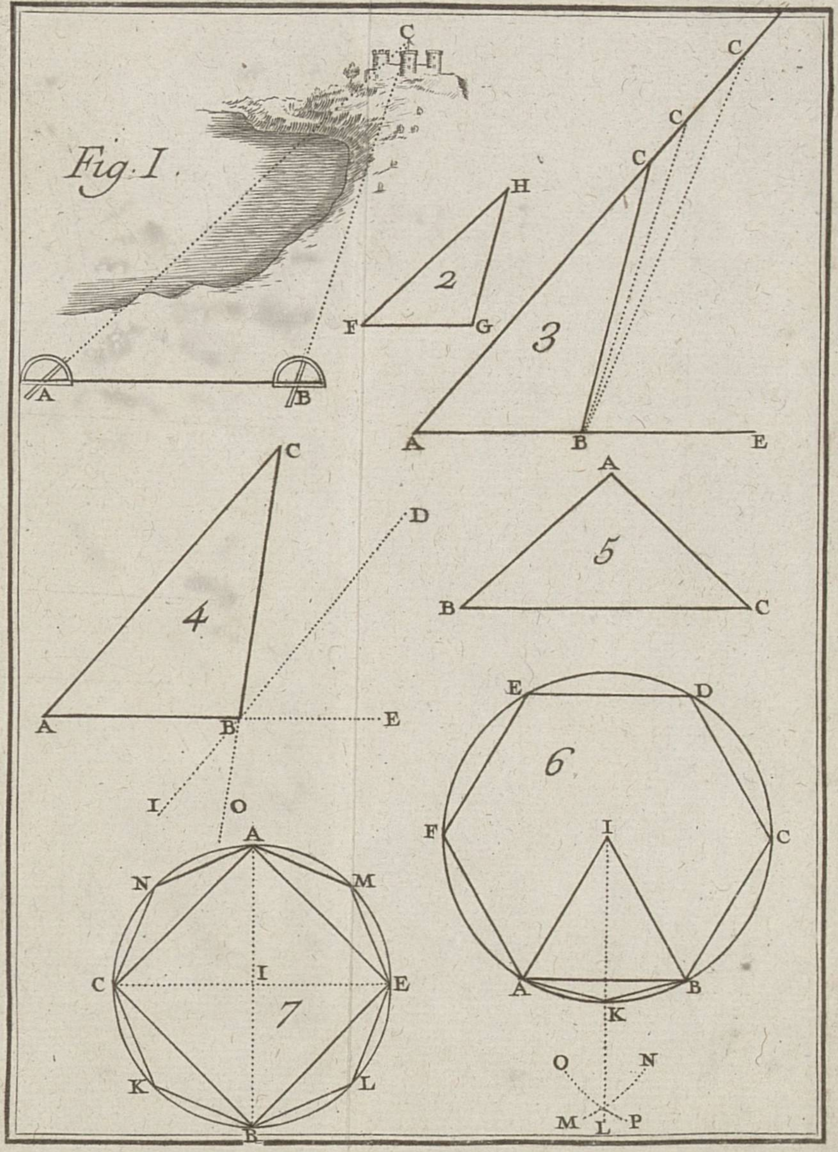


Fig. I.
C
A
B
H
2
F
G
C
C
C
C
3
A
B
E
C
D
4
A
B
E
I
O
A
5
B
C
E
D
6
F
C
I
A
B
K
O
N
M
L
P
A
N
M
C
I
E
7
K
L
B

Planche VII

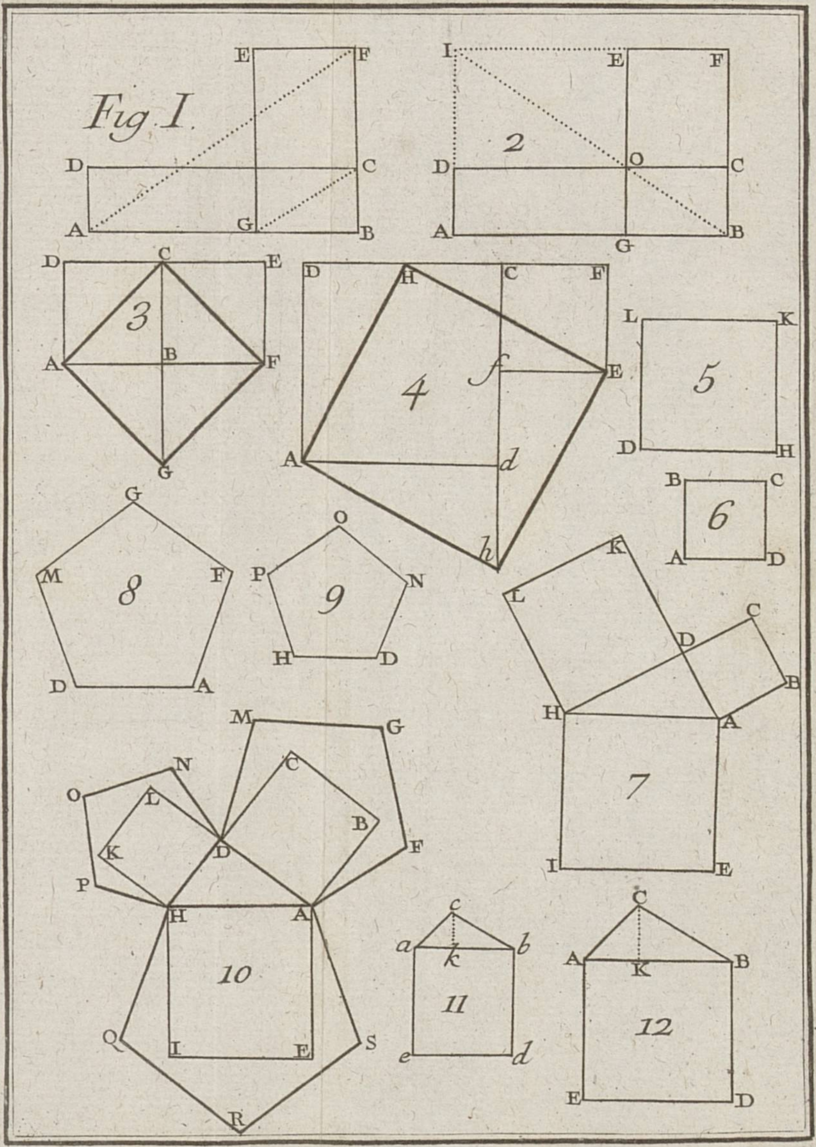


Fig. I.
E F D C A G B
I E F 2 D O C A G B
D C E 3 A B F G
D H C F 4 f E A d h
L K 5 D H
B C 6 A D
G M F 8 D A
O P N 9 H D
K L D C B H A 7 I E
M G N O C L K B D F P H A 10 Q I E S R
c a b k 11 e d
C A K B 12 E D

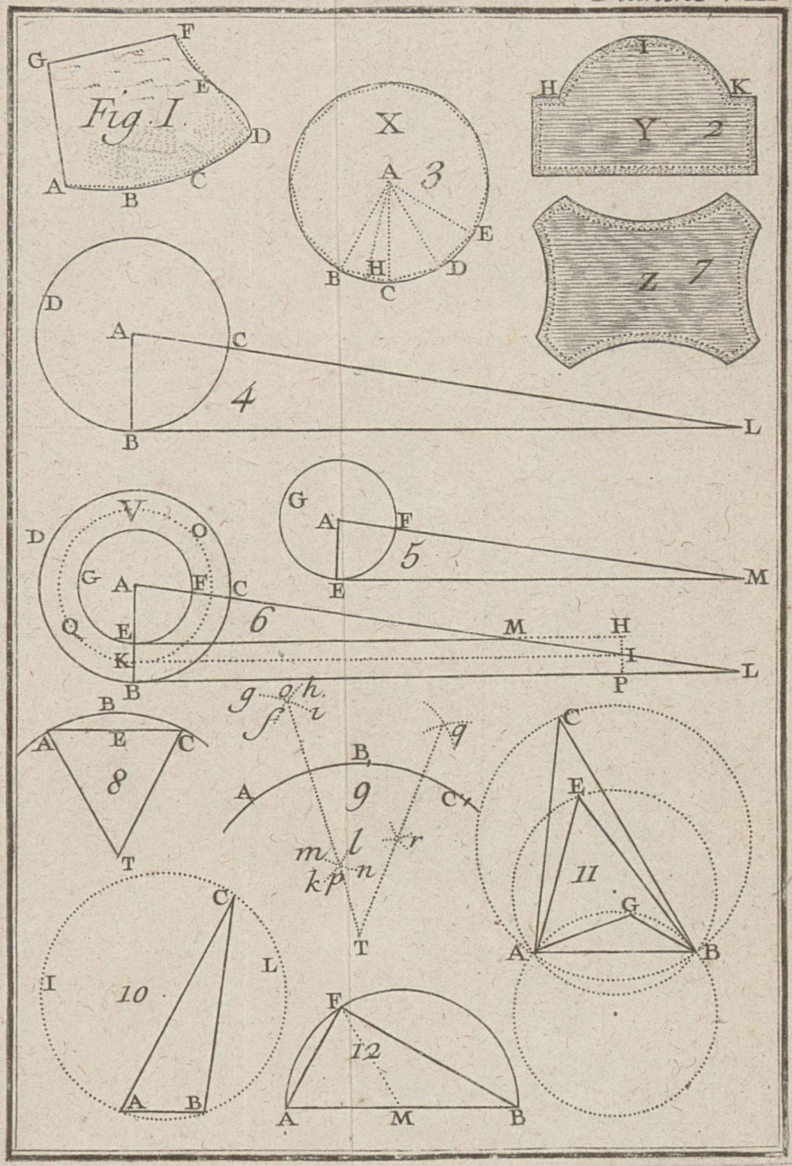


Fig. I.
G
F
E
D
C
B
A
X
A 3
E
D
C
H
B
H
I
K
Y 2
Z 7
D
A
C
4
B
L
V
O
D
G
A
F
C
6
Q
E
K
B
G
A
F
5
E
M
M
H
I
L
P
g
o
h
i
f
B
A
E
C
8
T
q
B
A
9
C
m
l
r
k
p
n
T
C
E
11
G
A
B
C
I
L
10
A
B
F
12
A
M
B

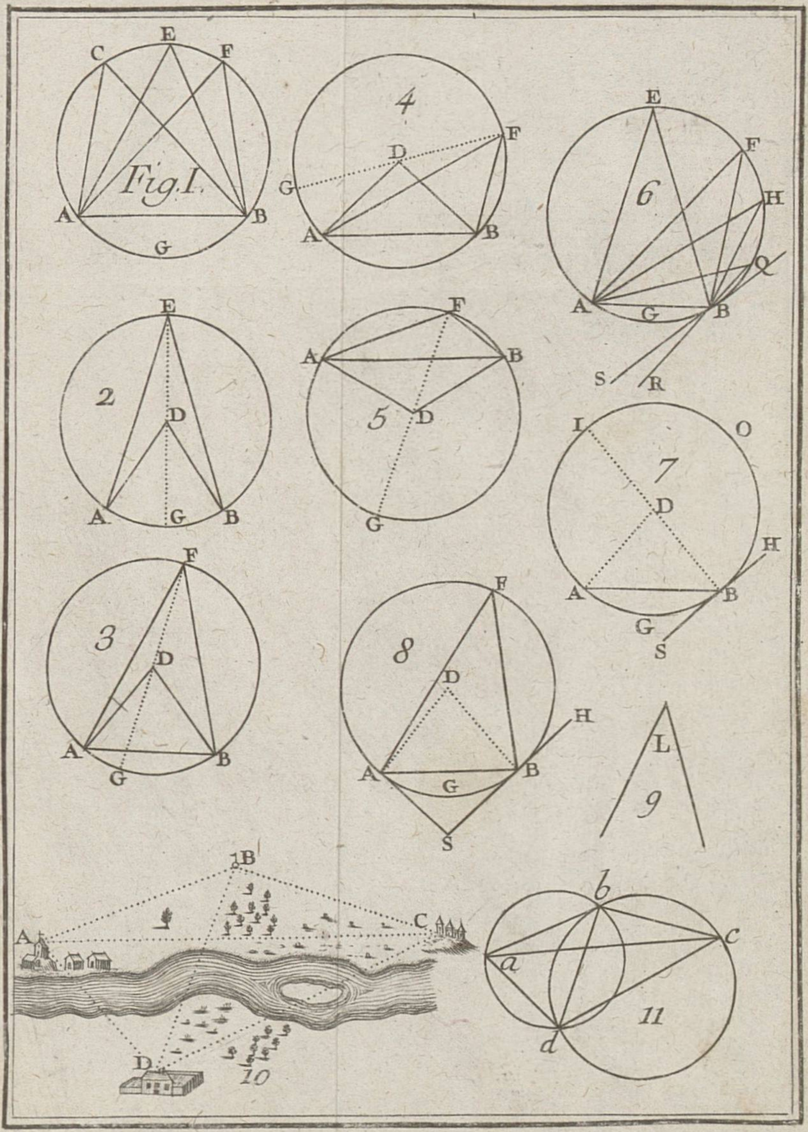


Fig. I.
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
A
B
C
D
E
F
G
H
L
O
Q
R
S
a
b
c
d

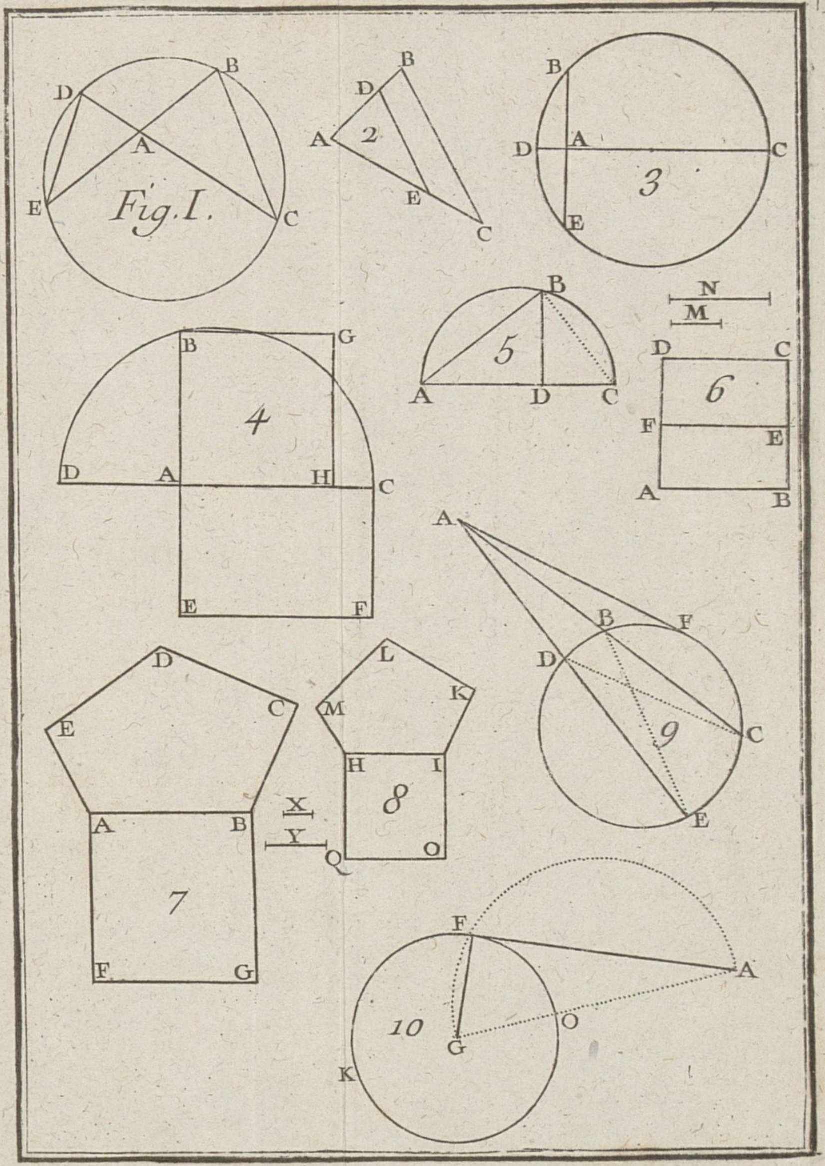


Fig. I.
D
B
A
E
C
2
B
D
A
E
C
3
B
D
A
C
E
4
B
G
D
A
H
C
E
F
5
B
A
D
C
N
M
6
D
C
F
E
A
B
9
A
B
F
D
C
E
7
D
E
C
A
B
F
G
X
Y
Q
8
L
M
K
H
I
O
10
F
A
G
O
K

Planche XI

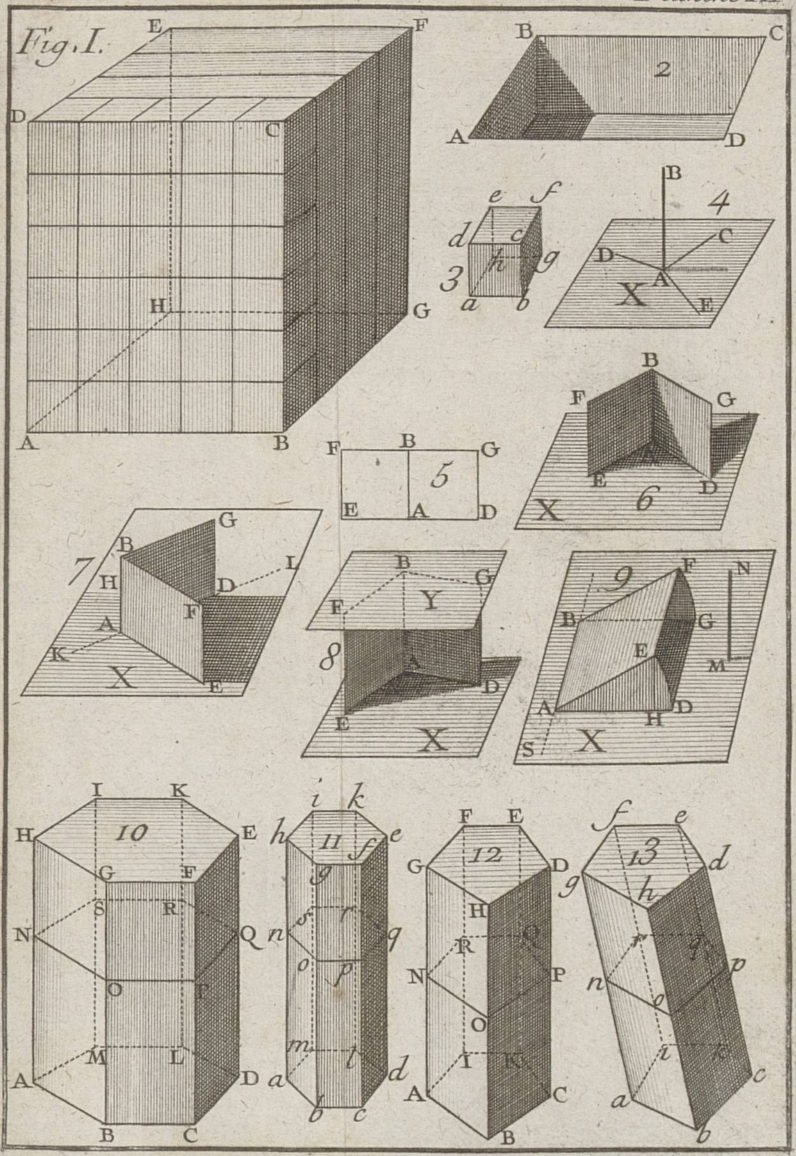
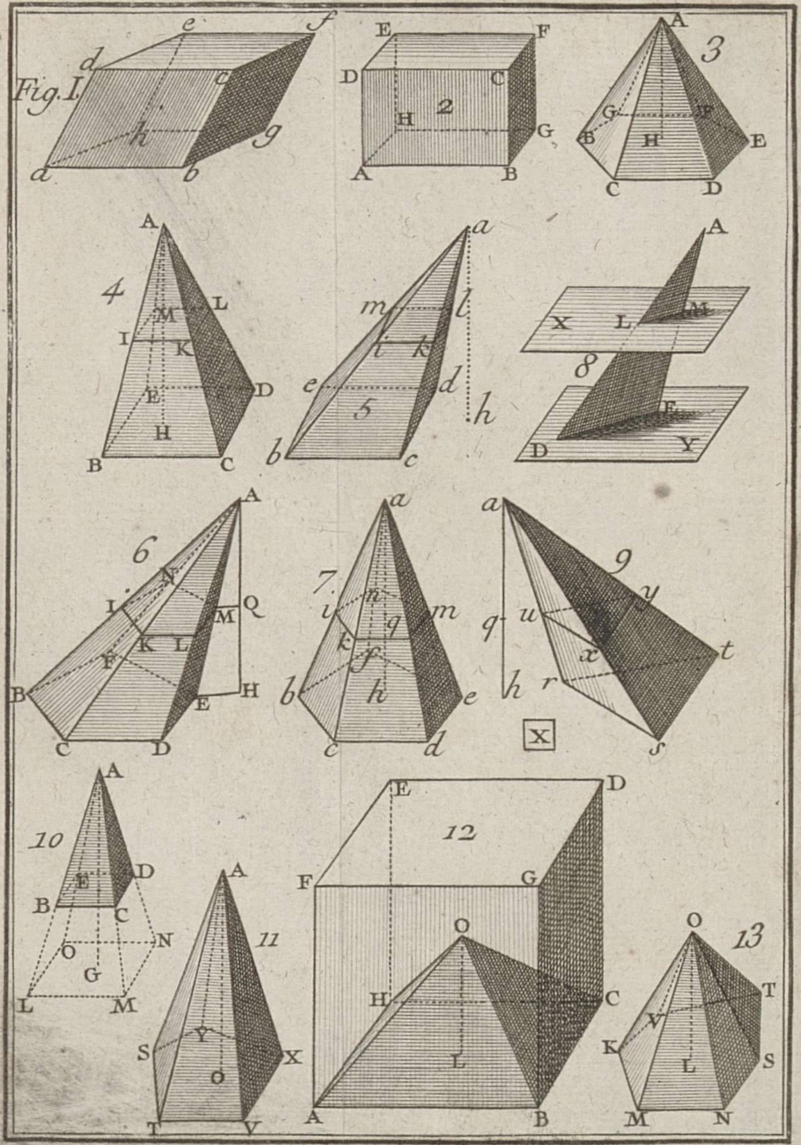


Fig. I.
E F D C H G A B
2
B C A D
3
e f d c h g a b
4
B C D A E X
5
F B G E A D
6
B F G E D X
7
G B L H D F A K X E
8
B G Y F A D E X
9
F N B G E M A H D S X
10
I K H E G F S R N Q O T M L A D B C
11
i k h e f g s r n q o p m t a d b c
12
F E G D H Q R N P O I K A C B
13
f e d g h n p o i k a c b

Planche XII



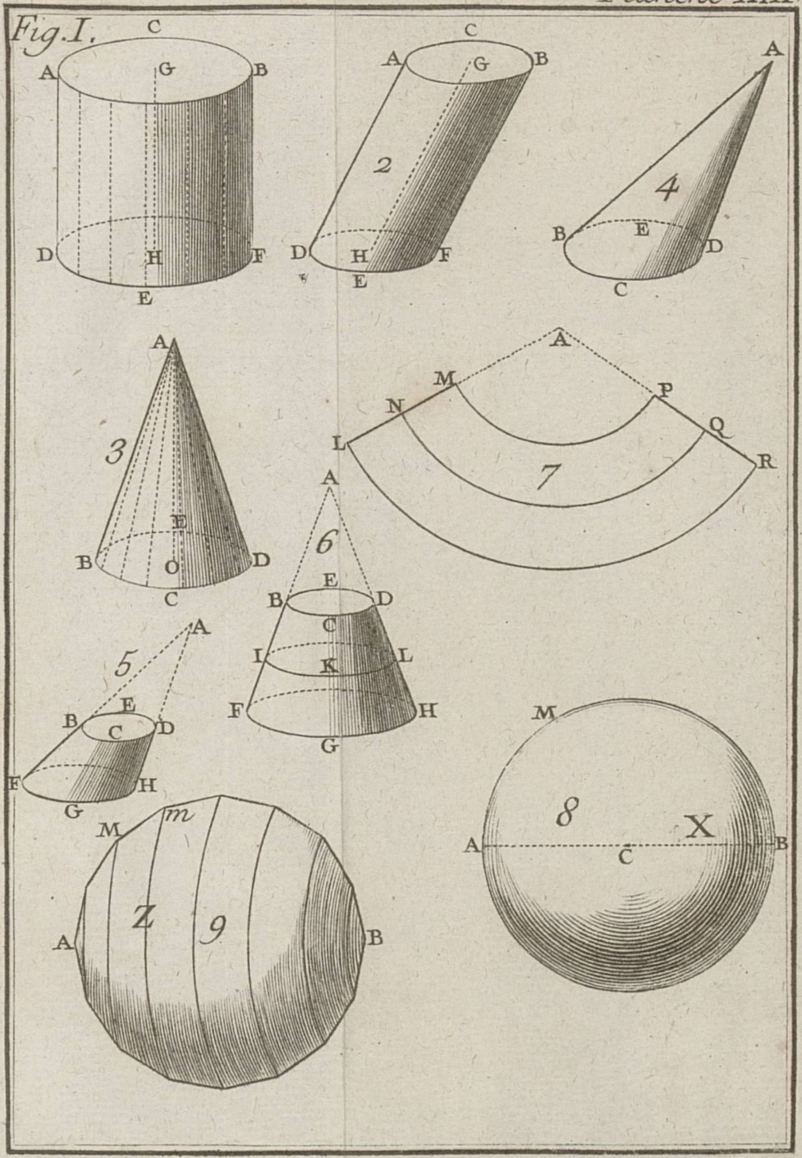


Fig. I.
C
A
G
B
D
H
F
E
2
4
3
5
6
7
8
9
X
Z
M
m
N
P
Q
L
R
I
K
O

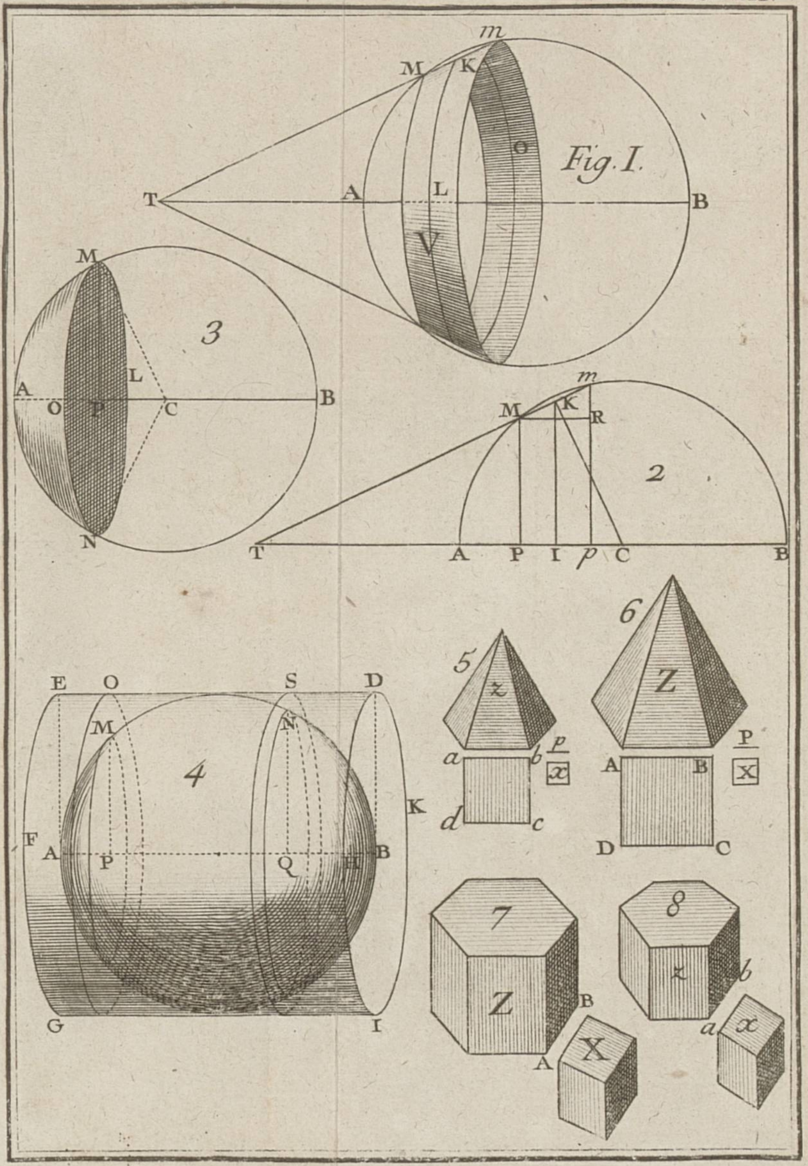


Fig. I.
m
M
K
O
T
A
L
B
V
3
M
A
O
P
L
C
B
N
2
m
M
K
R
T
A
P
I
p
C
B
4
E
O
S
D
M
N
K
F
A
P
Q
H
B
G
I
5
z
a
b
d
c
p
x
6
Z
A
B
D
C
P
X
7
Z
B
A
X
8
z
b
a
x

982

400.—

ELEMENS
DE
GEOMETRIE

inches 4 3 2 1 0

centimeters 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams